A. Logioti
F. Schewe
D. Zimmermann

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

Wintersemester 2022/23

I. Steinwart

Vortragsübungsblatt 10

Aufgabe V 29. *Gleichmäßige Konvergenz*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f_n(x)$. Zeigen Sie jeweils, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, wenn

(a) $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n} + x^2}$,

(b) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\cos(4^k \pi x)$.

Aufgabe V 30. *Gleichmäßige Konvergenz und die Exponentialfunktion*

Zeigen Sie, dass $x \mapsto s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig gegen $x \mapsto \mathrm{e}^x$ konvergiert.

Aufgabe V 31. *Limesformel der Exponentialfunktion*

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

(a) Verwenden Sie für den Nachweis der Behauptung für alle $x > 0$ den Binomischen Lehrsatz, um $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ in eine Summe umzuschreiben, die Sie mit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ vergleichen.

(b) Verwenden Sie dann das Ergebnis aus **(a)**, um $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$ für $x > 0$ geeignet durch e^x abzuschätzen.