R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen ohne Taschenrechner*

(a) Berechnen Sie $\frac{49}{8} \cdot \frac{4}{7/5}$, $3^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{7}{6}}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ und $(\sqrt{5})^3 - (\sqrt{2})^3$.

(b) Berechnen Sie $\binom{21}{3}$ und $\binom{7}{3} - \frac{7!}{4!}$.

(c) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq -5$ und $y^2 - y \neq 0$. Vereinfachen Sie:

$$\frac{(x+5)^2 - (x+1)(x+5)}{x+5} \cdot \frac{y(y-1) + y^2(2y^2 - 3y + 1)}{y^2 - y}.$$

Aufgabe P 2. *Summen*

Welche der folgenden Ausdrücke beschreiben das Gleiche?

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+3} a_{2k-5}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

(d) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1-(-1)^k}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) a_k$.

Aufgabe P 3. *Vollständige Induktion: Teleskopsummen*

Seien $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

(a) $\sum_{k=0}^{m} (a_{k+1} - a_k) = a_{m+1} - a_0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) $\sum_{k=1}^{m} k a^{k-1} = \frac{1-(1+m)a^m + m a^{m+1}}{(1-a)^2}$ für alle $a > 0$, $a \neq 1$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe P 4. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion die folgende Aussage:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqq 2 \text{ gilt } \sum_{k=0}^{n} 2^n \binom{n}{k} = 4^n.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 24.10. – 30.10.) auf folgender Webseite (dieser Link wechselt jede Woche!)

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (<st$******$@stud.uni-stuttgart.de>) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den ILIAS-Gruppen, um 24:00 Uhr.
Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 1. *Vereinfachen*

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}$.

(b) $\sqrt[5]{\frac{64x^{11}y^{12}}{\frac{1}{16}x^{-4}y^{2}}}$.

(c) $\dfrac{(a+b)^4-((a+b)(x-y))^2-a^2+x^2-2ab-b^2+y^2-2xy}{(a+b-x+y)(a^2+2ab+b^2-1)(x+y)}$ für $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ mit $x+y\neq 0,\ x-y\neq 0,\ |a+b|\neq 1,\ a+b\neq x-y$.

Aufgabe H 2. *Teleskopsummen*

Berechnen Sie

(a) $\sqrt{3}\sum_{n=0}^{7}\left(-(\sqrt{3})^n+\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^n\right)$.

(b) $\sum_{k=2}^{10}2^k$.

(c) $\sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n(n+1)}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Teleskopsummenformel aus P3 (a).

Aufgabe H 3. *Induktion*

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqq 2$ die Ungleichung $(n+1)^n\geqq 2^n n!$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit 1.3.5 aus der Vorlesung, dass $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geqq 2$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Gilt die Ungleichung aus (a) für alle $n\in\mathbb{N}_0$?

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Produkten*

Analog zur Summenschreibweise führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{i=1}^{n}A_i$ bedeutet, dass man den Term A_i für alle i von 1 bis n auswertet und die entstandenen Zahlen ausmultipliziert.

(a) Seien $n\in\mathbb{N}$, $a_n\in\mathbb{R}$ so, dass $a_n\geqq 0$.
Zeigen Sie mit Induktion, dass $1+\sum_{k=1}^{n}a_k\leqq\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ gilt.

(b) Seien $b_k\in\mathbb{N}_0$ für $k\in\mathbb{N}$ sowie $P_n:=\prod_{k=1}^{n}(2b_k+1)$.

Zeigen Sie induktiv, dass zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $\tilde{b}=\tilde{b}(n)\in\mathbb{N}_0$ existiert mit $P_n=2\tilde{b}+1$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 5. *Skizzen von Funktionsgraphen*

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sin(3x)+1$

(b) $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 1-(x-1)^2$

Hinweis: Eine solche Skizze beinhaltet immer eine Achsenbeschriftung mit Pfeilen und eine sinnvolle Achsenskalierung. Wir erwarten von Hand gefertigte Skizzen.