R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Polynome, Binomischer Lehrsatz*

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^3 + x + 6 = 2x^2 + 6x$.

(b) Zeigen Sie, dass $x^2 + 10x + 27$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Aufgabe P 6. *Ungleichungen und Betrag*

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2+2x-3} \geqq 0$.
Hinweis: Faktorisieren Sie den Nenner.

(b) $x^3 + 5 < x^2 + 5x < 0$.

(c) $x - 1 < |x-1||x+2|$.

Aufgabe P 7. *Mengen*

Seien

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -y\}, \\ M_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqq 2\}, \\ M_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y < -1\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die folgenden Mengen: M_1, M_2, M_3, $M_1 \setminus M_2$ und $M_1 \cap M_3$.

Aufgabe P 8. *Ungleichungen*

Seien $x_1, x_2, x_3 \geqq 0$.

(a) Begründen Sie mit Hilfe von **1.5.11**, dass

$$\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \leqq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}}$$

gilt.

(b) Begründen Sie mit Hilfe von **1.5.12**, dass

$$8\sqrt{x_1 x_2 x_3} \leqq (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)$$

gilt.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 31.10. – 06.11.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 6. *Polynome, Binomischer Lehrsatz*

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $(x^2-1)(x+3)=2x^2+4x-6$.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $x^4-2x^3-8x^2+18x-9$.

(c) Zeigen Sie, dass $-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Aufgabe H 7. *Ungleichungen und Betrag*

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x-10} \geqq \dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+5)}$.

(b) $|x^2+4| \leqq |x-1|+|x-3|$.

(c) $|-3\cos(2x+10)|-|-5|>0$.

Aufgabe H 8. *Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

(a) $M_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>y, \quad y\geqq -1\}$

(b) $M_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqq 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-x^2-1\geqq 0\}$.

(c) $M_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y+1)^2\leqq 1\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>0\}$.

(d) $M_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|>1, \quad x>y^2\}$.

Aufgabe H 9. *Ungleichungen*

(a) Für welche $x,y\in\mathbb{R}^+$ gilt $\dfrac{x}{y}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}\geqq 3$?

Hinweis: Ungleichung **1.5.12**.

(b) Sei $a>1$. Folgern Sie aus **1.5.10**, dass $\sqrt[n]{a}-1\leqq\frac{a-1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

(c) Sei $x_1=2$ und definiere rekursiv $2x_{n+1}=x_n+\frac{2}{x_n}$.
Zeigen Sie induktiv mit Hilfe von **1.5.12**, $x_n^2\geqq 2$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie $x_n>0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 10. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion dass

$$3\sum_{k=0}^{n-1}5^{n-1-k}2^k=5^n-2^n$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.