

Präsenzübungen

Aufgabe P 53. Definitheit

Entscheiden Sie für jede der folgenden Matrizen, ob die dadurch gegebene quadratische Form positiv definit, negativ definit oder indefinit ist:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 54. Hauptachsentransformation einer ebenen Quadrik

In \mathbb{R}^2 sei bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} die folgende Quadrik gegeben:

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1 + 6 = 0 \right\}.$$

- Geben Sie die Matrixbeschreibung für Q an.
- Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q .
- Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{H} an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.
- Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}$ und ${}_{\mathbb{H}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe P 55. Matrixdarstellung von Quadriken

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

- Beschreiben Sie die quadratische Form

$$q_\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: x = (x_1, x_2, x_3)^\top \mapsto 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2\alpha x_1x_2 + 2x_2x_3$$

durch eine symmetrische Matrix A_α als $q_\alpha(x) = x^\top A_\alpha x$.

- Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α .
- Für welche Werte des Parameters α ist die quadratische Form q_α positiv definit, negativ definit oder indefinit?

Aufgabe P 56. Quadriken

Gegeben sind die folgenden Quadriken

$$Q_1 := \left\{ (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 3 = 0 \right\},$$

$$Q_2 := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 + 4 = 0 \right\}.$$

- Geben Sie für jede Quadrik die Matrixbeschreibung an.
- Entscheiden Sie, ob Q_i , $i = 1, 2$ eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 06.02. – 13.02.) auf folgender Webseite.

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/>



Hausübungen (Abgabe in ILIAS):**Aufgabe H 66.** *Grobeinteilung von Quadriken*

Geben Sie zu den folgenden Quadriken jeweils die erweiterte Matrix an und bestimmen Sie ihren Typ (kegelige Quadrik, Mittelpunktsquadrik oder parabolische Quadrik):

(a) $Q_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0\},$

(b) $Q_\beta := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 + 2 = 0\},$

(c) $Q_\gamma := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 + 1 = 0\},$

(d) $Q_\delta := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1^2 + 12x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 6x_3 + 1 = 0\}.$

Aufgabe H 67. *Eigenwerte, Definitheit*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit von α .

(b) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von α .

(c) Für welche Werte des Parameters α ist $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ?

(d) Ist die quadratische Form $q_{A_3}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^T A_3 x$ positiv definit, negativ definit oder indefinit? Geben Sie (in den letzten beiden Fällen) einen Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ an mit $q_{A_3}(y) < 0$.

Aufgabe H 68. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_3 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dem Q euklidische Normalform besitzt und geben Sie die zugehörige euklidische Normalform an.

Aufgabe H 69. *Euklidische Normalform*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_3 + 1 = 0\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung dieser Quadrikgleichung an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q .

Frischhaltebox**Aufgabe H 70.** *Hessesche Normalform*

Sei E die Ebene durch die Punkte $P_1 = (0, 0, 3)$, $P_2 = (0, 3, 0)$, $P_3 = (1, 1, 0)$. Berechnen Sie die Hessesche Normalform von E .