R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Vereinfachen*

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}$.

(b) $\sqrt[5]{\frac{64x^{11}y^{12}}{\frac{1}{16}x^{-4}y^{2}}}$.

(c) $\dfrac{(a+b)^4-((a+b)(x-y))^2-a^2+x^2-2ab-b^2+y^2-2xy}{(a+b-x+y)(a^2+2ab+b^2-1)(x+y)}$ für $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ mit $x+y\neq 0,\ x-y\neq 0,\ |a+b|\neq 1,\ a+b\neq x-y$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}=3+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{10}{3}}}=3+\frac{1}{\frac{33}{10}}=3+\frac{10}{33}=\frac{109}{10}\,.$$

(b) Es gilt:

$$\sqrt[5]{\frac{64x^{11}y^{12}}{\frac{1}{16}x^{-4}y^{2}}}=\sqrt[5]{\frac{2^6x^{(11-(-4))}y^{(12-2)}}{2^{-4}}}=\sqrt[5]{2^{(6+4)}x^{15}y^{10}}=\sqrt[5]{(2^2)^5(x^3)^5(y^2)^5}=4x^3y^2\,.$$

(c) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+b)^4-((a+b)(x-y))^2-a^2+x^2-2ab-b^2+y^2-2xy}{(a+b-x+y)(a^2+2ab+b^2-1)(x+y)}\\
=&\frac{(a+b)^2((a+b)^2-(x-y)^2)+(x^2-2xy+y^2)-(a^2+2ab+b^2)}{(a+b-x+y)\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{(a+b)^2\left((a+b)+(x-y)\right)\left((a+b)-(x-y)\right)+\left((x-y)^2-(a+b)^2\right)}{(a+b-x+y)\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{(a+b)^2\left((a+b)+(x-y)\right)\left((a+b)-(x-y)\right)+\left((x-y)-(a+b)\right)\left((x-y)+(a+b)\right)}{(a+b-(x-y))\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{(a+b)^2\left((a+b)+(x-y)\right)\left((a+b)-(x-y)\right)-\left((a+b)-(x-y)\right)\left((a+b)+(x-y)\right)}{(a+b-(x-y))\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{\left((a+b)^2-1\right)\left((a+b)+(x-y)\right)\left((a+b)-(x-y)\right)}{(a+b-(x-y))\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{a+b+x-y}{x+y}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 2. *Teleskopsummen*

Berechnen Sie

(a) $\sqrt{3}\sum_{n=0}^{7}\left(-(\sqrt{3})^n+\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^n\right).$ **(b)** $\sum_{k=2}^{10} 2^k.$

(c) $\sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n(n+1)}.$

Hinweis: Verwenden Sie die Teleskopsummenformel aus P3 (a).

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit P3 (a) gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sum_{n=0}^{7}\left(-(\sqrt{3})^n+\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^n\right) &= \sum_{n=0}^{7}\left(-(\sqrt{3})^{n+1}+(\sqrt{3})^n\right)\\ &= -\sum_{n=0}^{7}\left((\sqrt{3})^{n+1}-(\sqrt{3})^n\right)\\ &= -(\sqrt{3}^8-\sqrt{3}^0)=1-3^4=-80.\end{aligned}$$

(b) Da nach P3 (a) einerseits

$$\sum_{k=2}^{10}(2^{k+1}-2^k)=2^{11}-2^2,$$

gilt und andererseits

$$\sum_{k=2}^{10}(2^{k+1}-2^k)=\sum_{k=2}^{10}2^k(2-1)=\sum_{k=2}^{10}2^k,$$

ist, gilt

$$\sum_{k=2}^{10}2^k=2^{11}-2^2=2^2(2^9-1)=4(512-1)=2044\,.$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=3}^{8}\frac{(n+1)-(n)}{n(n+1)}\\ &= \sum_{n=3}^{8}\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}\\ &= \sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\ &= -\sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\\ &= -\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe H 3. *Induktion*

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ die Ungleichung $(n+1)^n \geqq 2^n n!$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit 1.3.5 aus der Vorlesung, dass $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geqq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Gilt die Ungleichung aus (a) für alle $n \in \mathbb{N}_0$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zunächst halten wir fest, dass wegen 1.3.5 für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geqq 1+(n+1)\frac{1}{n+1} = 2$ gilt.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 2$: Es ist

$$(2+1)^2 = 3^2 = 9 \geqq 8 = 2^3 = (2^2)2!.$$

IH Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ die Ungleichung

$$(n+1)^n \geqq 2^n n!.$$

gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$:

$$\begin{aligned} 2^{n+1}(n+1)! &= (2^n)(2)(n+1)n! = 2(n+1)(2^n n!) \\ &\overset{\text{IH}}{\leqq} 2(n+1)(n+1)^n \leqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}(n+1)^{n+1} \\ &= \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)(n+1)\right)^{n+1} = ((n+1)+1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ bewiesen.

(b) FFür $n = 1$ gilt $2^1 = 2 \leqq (2^1)\cdot 1!$, für $n = 0$ gilt $1^0 = 1 \leqq 2^0 \cdot \underbrace{0!}_{=1}$. Somit gilt die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Produkten*

Analog zur Summenschreibweise führen wir das Produktsymbol ein: $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ bedeutet, dass man den Term A_i für alle i von 1 bis n auswertet und die entstandenen Zahlen ausmultipliziert.

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$ so, dass $a_n \geqq 0$.
Zeigen Sie mit Induktion, dass $1+\sum_{k=1}^{n} a_k \leqq \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ gilt.

(b) Seien $b_k \in \mathbb{N}_0$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie $P_n := \prod\limits_{k=1}^{n}(2b_k+1)$.

Zeigen Sie induktiv, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{b} = \tilde{b}(n) \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $P_n = 2\tilde{b}+1$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zur Erinnerung: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$, so ist $ab \geqq 0$. Diese Tatsache wird im Folgenden verwendet.

IA Wir zeigen die Aussage für $k = 1$: Es ist

$$1 + \sum_{k=1}^{1} a_k = 1 + a_1 \leqq (1 + a_1) = \prod_{k=1}^{1} (1 + a_k).$$

IH Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 1$ die Ungleichung

$$1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \leqq \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k).$$

gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) &= (1 + a_{n+1}) \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \\
&\overset{\text{IH}}{\geqq} (1 + a_{n+1})(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k) \\
&= 1 + a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\geqq 1 + (\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k
\end{aligned}$$

wegen $a_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k \geqq 0$.

Folglich gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 1$.

(b) Zur Erinnerung: Wenn $a, b \in \mathbb{N}_0$, so ist $ab \in \mathbb{N}_0$.

IA Wir zeigen die Aussage für $k = 1$: Es ist

$$P_1 = \prod_{k=1}^{1} (2b_k + 1) = 2b_1 + 1, .$$

IH Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{b}(n)$ existiert mit

$$P_n = 2\tilde{b}(n) + 1\,.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$:

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= \prod_{k=1}^{n+1} 2b_k + 1 \\
&= (\prod_{k=1}^{n} 2b_k + 1)(2b_{n+1} + 1) \\
&\overset{\text{IH}}{=} (2\tilde{b}(n) + 1)(2b_{n+1} + 1) \\
&= 2\tilde{b}(n) \cdot 2b_{n+1} + 2\tilde{b}(n) + 2b_{n+1} + 1 \\
&= 2\left(2\tilde{b}(n)b_{n+1} + b_{n+1} + \tilde{b}(n)\right) + 1.
\end{aligned}
$$

Mit $\tilde{b}(n+1) = 2\tilde{b}(n)b_{n+1} + b_{n+1} + \tilde{b}(n) \in \mathbb{N}_0$ gilt die Behauptung somit auch für $n+1$.

Nach volllständiger Induktion existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{b}(n)$ mit

$$P_n = 2\tilde{b}(n) + 1\,.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 5. *Skizzen von Funktionsgraphen*

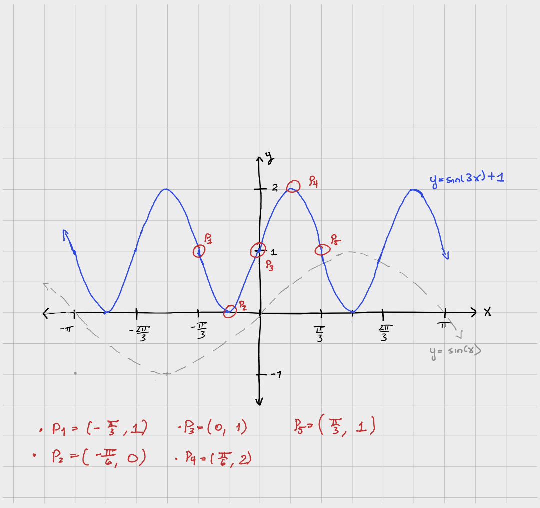
Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(3x) + 1$ **(b)** $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 - (x-1)^2$

Hinweis: Eine solche Skizze beinhaltet immer eine Achsenbeschriftung mit Pfeilen und eine sinnvolle Achsenskalierung. Wir erwarten von Hand gefertigte Skizzen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch Einsetzen von Teststellen $\big(f(-\pi/6) = 0,\ f(-\pi/3) = f(0) = f(2\pi/3) = 1,\ f(\pi/6) = 2\big)$ sowie Ausnutzen der $\frac{2}{3}\pi$-Periodizität erhalten wir die folgende Skizze:



(b) Durch Einsetzen von Teststellen $\big(g(0) = 0 = g(2),\ g(1) = 1,\ g(-1) = g(3) = -3\big)$ sowie Ausnutzen von Symmetrie erhalten wir die folgende Skizze: