R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 6. *Polynome, Binomischer Lehrsatz*

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $(x^2-1)(x+3) = 2x^2+4x-6$.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $x^4-2x^3-8x^2+18x-9$.

(c) Zeigen Sie, dass $-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da

$$\begin{aligned}(x^2-1)(x+3)-(2x^2+4x-6) &= (x-1)(x+1)(x+3)-2(x-1)(x+3)\\ &= (x-1)(x+3)(x-1)\end{aligned}$$

ergibt,sind die Lösungen sind $x=-1$ und $x=-3$.
Die Faktorisierung $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ ergibt sich hierbei beispielsweise über die allgmeine Lösungsformel:

$$\begin{aligned}x^2+2x-3=0 & \qquad\qquad \Downarrow\\ x_1 = \frac{-2+\sqrt{4-4\cdot(-3)}}{2} &= 1\\ x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} &= -3\,.\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}x^4-2x^3-8x^2+18x-9 &= x^2\cdot(x^2-2x+1)-9\left(x^2-2x+1\right)\\ &= (x^2-9)\cdot(x-1)^2 = (x-1)^2(x-3)(x+3)\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind folglich $x=-3$, $x=1$, und $x=-3$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25 &= -1-(x^{100}+x^{10})-(x^4-10x^2+25)\\ &= -1-(x^{100}+x^{10})-(x^4-10x^2+25)\\ &= -1-(x^{100}+x^{10})-(x^2-5)^2\,,\end{aligned}$$

woraus mit $-(x^{100}+x^{10}) \leqq 0$ und $-(x^2-5)^2 \leqq 0$

$$-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25 = -1-(x^{100}+x^{10})-(x^2-5)^2 \leqq -1 < 0.$$

folgt. Wir kommen zu dem Schluss, dass $-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Aufgabe H 7. *Ungleichungen und Betrag*

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x-10} \geqq \dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+5)}$.

(b) $|x^2+4| \leqq |x-1|+|x-3|$.

(c) $|-3\cos(2x+10)|-|-5| > 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir faktorisieren zuerst die Polynome:

$$\begin{aligned} x^2+x-2 &= (x-1)(x+2), \\ x^2+3x-10 &= (x+5)(x-2), \\ x^2+2x-3 &= (x-1)(x+3). \end{aligned}$$

Wir vereinfachen den rationalen Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+x-2}{x^2+3x-10} \geqq \frac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+5)} \\ \iff & \frac{(x-1)(x+2)}{(x+5)(x-2)} - \frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+5)} \geqq 0 \\ \iff & \frac{(x-1)(x+2)-(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+5)} \geqq 0 \\ \iff & \frac{(x-1)(x+2-x-3)}{(x-2)(x+5)} \geqq 0 \\ \iff & \frac{(x-1)(-1)}{(x-2)(x+5)} \geqq 0 \\ \iff & \frac{x-1}{(x-2)(x+5)} \leqq 0. \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Zählers und des Nenners sind $x=-5$, $x=1$ und $x=2$.

- Wenn $x<-5$ ist, dann sind $x-1<0$, $x-2<0$ und $x+5<0$, also ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} < 0\,.$$
- Wenn $x=-5$ ist, dann ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)}$$
nicht definiert.
- Wenn $-5<x<1$ ist, dann sind $x-1<0$, $x-2<0$ und $x+5>0$, also ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} > 0\,.$$
- Wenn $x=1$ ist, dann ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} = 0\,.$$
- Wenn $1<x<2$ ist, dann sind $x-1>0$, $x-2<0$ und $x+5>0$, also ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} < 0\,.$$
- Wenn $x=2$ ist, dann
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)}$$
nicht definiert.

- Wenn $2 < x$, dann sind $x-1>0$, $x-2>0$ und $x+5>0$, also ist

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} > 0\,.$$

Die Lösungmenge ist folglich $(-\infty,-5)\cup[1,2)$.

(b) Beachten Sie, dass $x^2+4 \geqq 0$ für $x\in\mathbb{R}$, also

$$|x^2+4| \leqq |x-1|+|x-3| \iff 0 \leqq |x-1|+|x-3|-x^2-4.$$

Wir analysieren, wann $x-1$ und $x-3$ das Vorzeichen ändern.

- Wenn $x<1$ ist, sind $|x-1| = -(x-1) = 1-x$ und $|x-3| = 3-x$, folglich gilt
$$|x-1|+|x-3|-x^2-4 = 4-2x-x^2-4 = (-x)(x+2)\,.$$
Daher entspricht die Ungleichung für $x<1$ der Ungleichung $0 \leqq (-x)(x+2)$. Die Nullstellen für $(-x)(x+2)$ sind $x=-2$ und $x=0$.
  - Wenn $x<-2$ ist, dann sind $-x>0$, $(x+2)<0$ und $(-x)(x+2)<0$.
  - Wenn $x=-2$ oder $x=0$ ist, dann ist $(-x)(x+2)=0$.
  - Wenn $-2<x<0$ ist, dann sind $-x>0$, $(x+2)>0$ und $(-x)(x+2)>0$.
  - Wenn $x=0$ ist, dann ist $(-x)(x+2)=0$.
  - Wenn $0<x<1$ ist, dann sind $-x>0$, $(x-2)<0$ und $(-x)(x+2)<0$.

  Somit ist die Ungleichung für $x<1$ nur für $x\in M_1=[-2,0]$ erfüllt.
- Für $x=1$ gilt $|x^2+4|=5$ und $|x-1|+|x-3|=2$, also ist die Ungleichung nicht erfüllt.
- Wenn $1<x<3$ ist, folgen $|x-1|=x-1$ und $|x-3|=3-x$, also
$$|x-1|+|x-3|-x^2-4 = 2-x^2-4 = -(2+x^2)\,.$$
Somit entspricht die Ungleichung $0\leqq -(2+x^2)$ der Ungliechung
$$0 \geqq 2+x^2\,.$$
Aber $2+x^2 \geqq 2 > 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, die Ungleichung gilt für kein $x\in(1,3)$.
- Wenn $x=3$ ist, dann ist $|x^2+4|=13$ und $|x-1|+|x-3|=2$ also gilt die Ungleichung nicht.
- Wann $3<x$ ist, sind $|x-1|=x-1$ und $|x-3|=x-3$, es gilt
$$|x-1|+|x-3|-x^2-4 = -x^2+2x-8\,.$$
Die Ungleichung ist nun
$$0 \leqq -x^2+2x-8 = -x^2+2x-1-7 = -(x-1)^2-7 < 0\,.$$
Folglich gilt die Ungleichung für kein $x>3$.

Die Lösungsmenge ist folglich $[-2,0]$.

(c) Es gilt

$$|-3\cos(2x+10)| = |-3||\cos(2x+10)| \leqq |-3| = 3,$$

also

$$|-3\cos(2x+10)| - |-5| \leqq 3-5 = -2\,,$$

und die Ungleichung ist nie erfüllt. Die Lösungsmenge ist somit leer.

Aufgabe H 8. *Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

(a) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y, \quad y \geqq -1\}$

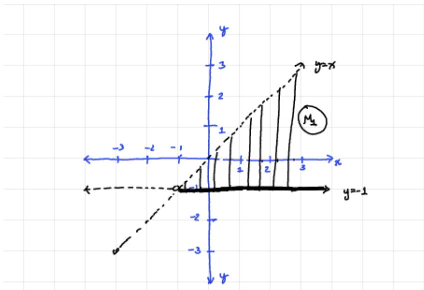
(b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 - 1 \geqq 0\}$.

(c) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$.

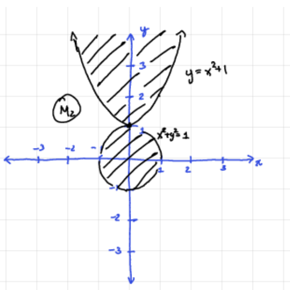
(d) $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 1, \quad x > y^2\}$.

Lösungshinweise hierzu:

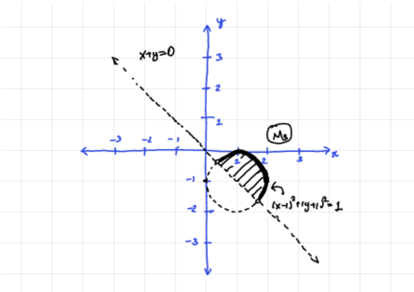
(a) Das Gebiet wird von den Graphen der Funktionen $x \mapsto y$ und $x \mapsto -1$ berandet, wobei es sich in beiden Fällen um Geraden handelt. Hierbei ist zu beachten, dass erstere nicht zur Menge gehört und entsprechend zu Markieren ist. Es ergibt sich folgende Skizze:



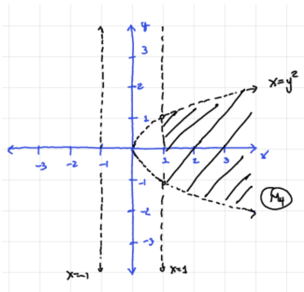
(b) Die erste Menge beschreibt eine Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung. Die zweite Menge besteht aus der durch $y^2 = x^2 + 1$ gegebenen Parabel sowie der Menge „oberhalb" von dieser. Es ergibt sich folgende Skizze:



(c) Bei der ersten Teilmenge handelt es sich um eine Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(1,-1)$. Die zweite Menge beinhaltet alle oberhalb der durch $y = -x$ gegebenen Gerade liegenden Punkte. Da besagte Gerade nicht dazugehört, gehören insbesondere die Schnittpunkte mit dem Kreisrand ebenfalls nicht dazu. Es ergibt sich folgende Skizze:



(d) Der Rand $x = y^2$ beschreibt eine an $x = y$ gespiegelte Standardparabel, die Ungleichung $|x| > 1$ alle Punkte, die außerhalb des durch die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ berandeten Streifens liegen, woraus sich die eingezeichnete Schnittmenge ergibt. Es ergibt sich folgende Skizze:



Aufgabe H 9. *Ungleichungen*

(a) Für welche $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt $\dfrac{x}{y} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} \geqq 3$?

Hinweis: Ungleichung **1.5.12**.

(b) Sei $a > 1$. Folgern Sie aus **1.5.10**, dass $\sqrt[n]{a} - 1 \leqq \frac{a-1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Sei $x_1 = 2$ und definiere rekursiv $2x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}$.
Zeigen Sie induktiv mit Hilfe von **1.5.12**, $x_n^2 \geqq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \overset{1.5.12}{\geqq} 3\left(\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3,$$

die Gleichung gilt somit für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

(b) Es ist

$$\sqrt[n]{a} - 1 \leqq \frac{a-1}{n} \iff \sqrt[n]{a} \leqq \frac{a-1}{n} + 1 \iff a \leqq \left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n.$$

Es genügt daher, die dritte Ungleichung zu zeigen. Da $\frac{a-1}{n} > 0$ wegen $a > 1$ ist, ist Ungleichung **1.5.10** anwendbar:

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geqq 1 + n\left(\frac{a-1}{n}\right) = 1 + a - 1 = a.$$

(c) Wir nutzen Induktion.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Wegen $x_1 = 2$ gilt dass $x_1^2 = 4 \geqq 2$.

IH Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n^2 \geqq 2$ gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$, in dem wir x_{n+1}^2 berechnen:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)\right)^2 \\ &= \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\right)^2 \\ &= \frac{x_n^2}{4} + 1 + \frac{1}{x_n^2} \\ &= 2\left(\frac{\frac{x_n^2}{4} + \frac{1}{x_n^2}}{2}\right) + 1. \end{aligned}$$

Da aber nach Induktionshypothese $x_n^2 \geqq 2$ gilt, folgt insbesondere $\frac{x_n^2}{4} > 0$ und $\frac{1}{x_n^2} > 0$ und wir können Ungleichung **1.5.12** nutzen:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= 2\left(\frac{\frac{x_n^2}{4} + \frac{1}{x_n^2}}{2}\right) + 1 \\ &\geqq 2\left(\frac{x_n^2}{4} \cdot \frac{1}{x_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 1$ bewiesen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 10. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion dass

$$3\sum_{k=0}^{n-1} 5^{n-1-k}2^k = 5^n - 2^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$:

$$3\sum_{k=0}^{0} 5^{1-1-k}2^k = 3\sum_{k=0}^{0} 5^{-k}2^k = 3 = 5^1 - 2^1$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$:

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=0}^{(n+1)-1} 5^{(n+1)-1-k}2^k &= 3\sum_{k=0}^{n}(5)(5^{n-1-k})2^k \\
&= 5\left(3\sum_{k=0}^{n-1} 5^{n-1-k}2^k\right) + (5)(3)5^{n-1-n}2^n \\
&\overset{\text{IH}}{=} 5 \cdot (5^n - 2^n) + (3)2^n \\
&= 5^{n+1} - (5)2^n + (3)2^n \\
&= 5^{n+1} - (5-3)2^n \\
&= 5^{n+1} - 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.