Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 11. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon x \mapsto (\cos(5x)\,, 2\sin(x))$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto 2x^2 + 1$

(c) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \colon\ z \mapsto z(1+i) + \overline{z}(1-i)$

(d) $f_4 \colon \mathbb{C} \smallsetminus \{-2\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{1\} \colon z \mapsto \frac{z}{z+2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) f ist nicht injektiv, so gilt beispielsweise $f_1(0) = (1,0) = f_1(2\pi)$.
Weil $|\cos(x)| \leqq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, gibt keine reelle Zahl x gibt mit $f_1(x) = (-4,0)$, deshalb ist f_1 nicht surjektiv.
Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn es injektiv sowohl als auch surjektiv ist. Es folgt damit, dass f_1 nicht bijektiv ist.

(b)
- Surjektivität: Der Wert $\frac{1}{2}$ liegt nicht im Bild von f_2, somit ist f_2 nicht surjektiv: Es gilt
$$2x^2 + 1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{4}\,,$$
wofür keine reellle Lösung existiert.
- Injektivität: Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, wobei $f_2(a) = f_2(b)$ gelte. Es folgt
$$2a^2 + 1 = 2b^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \stackrel{a,b \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} a = b.$$
Somit ist f_2 injektiv.
- Bijektivität: Da f_2 nicht surjektiv ist, ist f_2 nicht bijektiv.

(c) Ist $z = a + b\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl, so gilt $z + \bar{z} = a + b\mathrm{i} + (a - b\mathrm{i}) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
Insbesondere gilt:
$$\begin{aligned} f_3(z) &= z(1+\mathrm{i}) + \bar{z}(1-\mathrm{i}) = z(1+\mathrm{i}) + z(1\bar{-}\mathrm{i}) = 2\,\mathrm{Re}(z(1+\mathrm{i})) \\ &= 2\,\mathrm{Re}((a+b\mathrm{i})(1+\mathrm{i})) = 2\,\mathrm{Re}((a-b\mathrm{i}) + \mathrm{i}(a+b)) = 2(a-b) \end{aligned}$$

- Injektivität: Die beiden Zahlen 2 und $-2\mathrm{i}$ sind verschieden, aber es gilt
$$f_3(2) = 4 = f_3(-2\mathrm{i}).$$
Somit ist f_3 nicht injektiv.
- Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$ ein beliebig gewählter Wert. Nun gilt beispielsweise $f_3\left(\frac{y}{2}\right) = y$. Damit ist das Bild von f_3 die gesamte Menge $\mathbb{R}$ und f_3 ist surjektiv.
- Bijektivität: Da f_3 nicht injektiv ist, ist f_3 nicht bijektiv.

(d)
- Injektivität: Seien $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ und es gelte $f_4(z) = f_4(w)$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{z}{z+2} &= \frac{w}{w+2} \\ \Leftrightarrow z(w+2) &= w(z+2) \\ \Leftrightarrow zw + 2z &= zw + 2w \\ \Leftrightarrow z &= w. \end{aligned}$$

  Somit ist f_4 injektiv.
- Surjektivität: Sei $w = f_4(z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} w &= \frac{z}{z+2} \\ \Leftrightarrow w(z+2) &= z \\ \Leftrightarrow (w-1)z + 2w &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{2w}{w-1} \end{aligned}$$

  Somit existiert zu jedem $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ein z mit $f_4(z) = w$, f_4 ist surjektiv.
- Bijektivität: Da f_4 sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist f_4 bijektiv.

Aufgabe H 12. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil, Betrag und Kehrwert der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $z_1 = \dfrac{2-\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$

(b) $z_2 = \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + \dfrac{1+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}$

(c) $z_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})\right)^8$

(d) $z_4 = \dfrac{\left|1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|^2 - \mathrm{Re}\,(-2+5\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i}}{\mathrm{Im}\,(5+2\mathrm{i})}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$z_1 = \frac{2-\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \frac{(2-\mathrm{i})\overline{(4+3\mathrm{i})}}{(4+3\mathrm{i})\overline{(4+3\mathrm{i})}} = \frac{(2-\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})}{|4+3\mathrm{i}|^2} = \frac{8-6\mathrm{i}-4\mathrm{i}-3}{4^2+3^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}.$$

Also erhalten wir

$$\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{5} \quad , \quad \mathrm{Im}(z_1) = -\frac{2}{5}$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z_1}}{z_1\bar{z_1}} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}\right) \cdot = 1 + 2\mathrm{i}$$

(b) Es gilt $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$. Weiter ergibt sich

$$z_2 = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{1+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2} = \frac{3}{2}\mathrm{i} - \frac{1+2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{(1+2\mathrm{i})\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{\mathrm{i}-2}{2} = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\mathrm{i} - 1 = -1 + 2\mathrm{i}.$$

Es folgt

$$\mathrm{Re}(z_2) = -1 \quad , \qquad \mathrm{Im}(z_2) = 2$$
$$|z_2| = \sqrt{5} \quad , \quad z_2^{-1} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{i}.$$

(c) Es ist

$$z_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})\right)^8 = \frac{1}{(2)^4}(-1+\mathrm{i})^8 = \frac{1}{16}(-1+\mathrm{i})^8.$$

Es gilt $(-1+\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$. Somit ergibt sich $(-1+\mathrm{i})^8 = (-2\mathrm{i})^4 = 16\mathrm{i}^4 = 16$. Insgesamt ist also $z_3 = 1$. Es gilt

$$\mathrm{Re}(z_3) = 1 \quad , \quad \mathrm{Im}(z_3) = 0, \qquad |z_3| = 1,\ z_3^{-1} = 1.$$

(d) Es ist

$$z_4 = \frac{\left|1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|^2 - \mathrm{Re}\,(-2+5\mathrm{i})\cdot \mathrm{i}}{\mathrm{Im}\,(5+2\mathrm{i})} = \frac{(1+3)+2\mathrm{i}}{2} = 2+\mathrm{i}\,.$$

Folglich gilt

$$\mathrm{Re}(z_4) = 2 \quad , \qquad \mathrm{Im}(z_4) = 1$$
$$|z_4| = \sqrt{5} \quad , \quad z_4^{-1} = \frac{\overline{z_4}}{|z_4|^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}\,.$$

Aufgabe H 13. *Gleichungen im Komplexen*

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} - 3\mathrm{i}\overline{z} = 1 + 3\mathrm{i}$?

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\frac{1}{2}z^2 + (1-\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i}) = 0$?

Hinweis: Verwenden Sie quadratische Ergänzung!

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z^5 + z^3 - 30z = 0$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $z = x + y\mathrm{i}$. Die Gleichung ist dann $(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(x-y\mathrm{i}) = 1+3\mathrm{i}$. Ausmultiplizieren ergibt $x^2 + y^2 - 3y - 3\mathrm{i}x = 1 + 3\mathrm{i}$. Folglich sind

$$\begin{cases} x^2+y^2-3y &= 1 \\ -3x &= 3 \end{cases}$$

Hieraus folgt $x = -1$ und somit $y = 0$ oder 3. Die Lösungen der Gleichung sind $z = -1$ und $z = -1 + 3\mathrm{i}$.

(b) Es gilt:

$$\frac{1}{2}z^2 + (1-\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2(1-\mathrm{i})z + (4-2\mathrm{i}) = 0$$

wodurch sich die Gleichung umformen lässt zu

$$(z + (1-\mathrm{i}))^2 = -(4-2\mathrm{i}) + (1-\mathrm{i})^2 = -4 + 2\mathrm{i} + 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -4$$

Mit $-4 = (\pm 2\mathrm{i})^2$ erhalten wir die Lösungen

$$z_1 = -2\mathrm{i} - (1-\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}$$
$$z_2 = 2\mathrm{i} - (1-\mathrm{i}) = -1+3\mathrm{i}$$

Alternativer Lösungsweg:
Wir verwenden die Mitternachtsformel (vgl. Zusatzmaterial)

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{-(1-\mathrm{i}) \pm \sqrt{(1-\mathrm{i})^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot(2-\mathrm{i})}}{2\cdot\frac{1}{2}} = -1+\mathrm{i} \pm \sqrt{1-2\mathrm{i}-1-4+2\mathrm{i}} \\ &= -1+\mathrm{i}\pm\sqrt{-4} = -1+\mathrm{i}\pm 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Die Gleichung hat somit die Lösungen $z_1 = -1+3\mathrm{i}$ und $z_2 = -1-\mathrm{i}$.

(c) Ausklammern ergibt die Gleichung

$$z(z^4+z^2-30) = 0\,,$$

welche die Lösung $z_1 = 0$ hat. Die Substition $z^2 = x$ ergibt die quadratische Gleichung $x^2+x-30=0$. Mit der Mitternachtsformel ergeben sich die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -6$. Durch die Resubstituieren ergibt sich $z_2 = \sqrt{5},\ z_3 = -\sqrt{5}$ und $z_4 = \sqrt{6}\,\mathrm{i},\ z_5 = -\sqrt{6}\,\mathrm{i}$. Die Gleichung hat also die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{6}\,\mathrm{i}, -\sqrt{6}\,\mathrm{i}\}$.

Aufgabe H 14. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A := \left\{ z\in\mathbb{C} \,\middle|\, |z-2-\mathrm{i}| \geqq 1 \right\}$

(b) $B := \left\{ z\in\mathbb{C} \,\middle|\, 3\,\mathrm{Re}(z)^2 = 2\,\mathrm{Im}(z)^2 - \mathrm{Re}(z^2) \right\}$

(c) $C := \left\{ z\in\mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z)\neq 0 \ \wedge\ 1 < \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)} \leqq 2 \right\}$

Lösungshinweise hierzu:

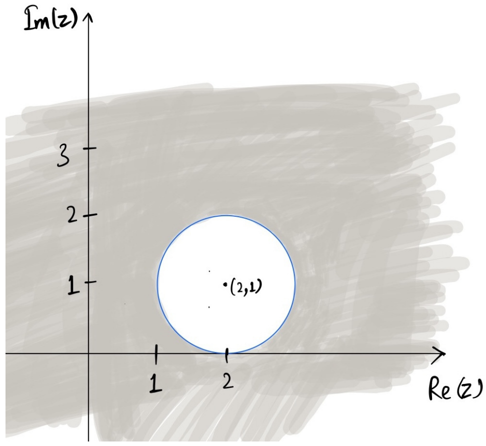
(a) Für $z = a+\mathrm{i}b$ gilt

$$|z-2-\mathrm{i}| = |a-2+\mathrm{i}(b-1)| = (a-2)^2+(b-1)^2.$$

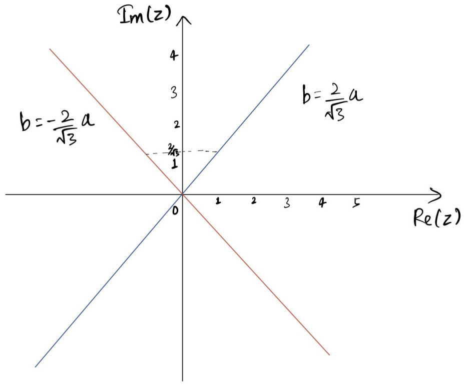
Daher folgt

$$A = \left\{ a+b\mathrm{i}\in\mathbb{C} \,\middle|\, (a-2)^2+(b-1)^2 \geqq 1 \right\}.$$

Die Menge A ist eine Scheibe entfernt von einem Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(2,1)$.



(b) Es ist $B := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 3\operatorname{Re}(z)^2 = 2\operatorname{Im}(z)^2 - \operatorname{Re}(z^2) \right\}$. Sei $\operatorname{Re}(z) = a$ und $\operatorname{Im}(z) = b$, dann $z^2 = (a + b\mathrm{i})^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\mathrm{i} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = (a^2 - b^2)$ und $\operatorname{Im}(z^2) = 2ab$.
$3a^2 = 2b^2 - a^2 + b^2 \Leftrightarrow 4a^2 - 3b^2 = 0$
Es gilt $b = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}a$. Damit ist die Menge die Geraden $b = -\frac{2}{\sqrt{3}}a$ und $b = \frac{2}{\sqrt{3}}a$.



(c) Wir können die Menge C darstellen als $C = \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, b \neq 0 \;\wedge\; 1 < \frac{a}{b} \leqq 2 \right\}$. Wegen $\frac{a}{b} > 1 > 0$ für $a + b\mathrm{i} \in C$ sind entweder a und b beide positiv, oder beide negativ. Es gibt also zwei Fälle:

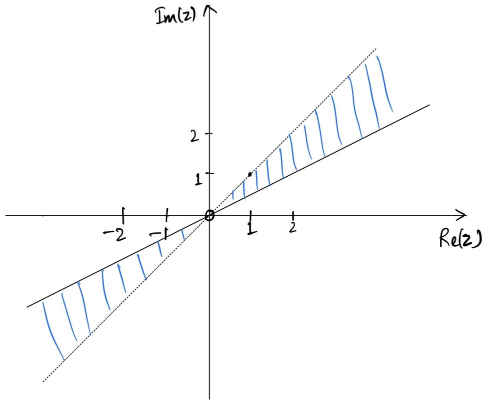
1. Fall: $a > 0$ und $b > 0$: Dann gilt $b < a \leqq 2b$.

2. Fall: $a < 0$ und $b < 0$: Dann gilt $2b \leqq a < b$.

Damit können wir C darstellen als

$$\begin{aligned} C = &\left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, a > 0,\; b > 0 \text{ und } b < a \leqq 2b \right\} \cup \\ &\left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, a < 0,\; b < 0 \text{ und } 2b \leqq a < b \right\}. \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende Fläche, wobei die gestrichelte Gerade und der Punkt 0 nicht zu C gehören.



Frischhaltebox

Aufgabe H 15. *Elementares Rechnen ohne Taschenrechner*

Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha+1}$.

(b) $\frac{\alpha^3+4\alpha^2-49\alpha-196}{\alpha^2-49} - 3(\alpha + 4)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$
\begin{aligned}
\frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha + 1} &= \frac{2\alpha(\alpha + 1) - \alpha - 1}{\alpha + 1} \\
&= \frac{(2\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)} = 2\alpha - 1.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha^3 + 4\alpha^2 - 49\alpha - 196}{\alpha^2 - 49} - 3(\alpha + 4) &= \frac{\alpha(\alpha^2 - 49 + 4(\alpha^2 - 49)}{\alpha^2 - 49} - 3(\alpha + 4) \\
&= \frac{(\alpha + 4)(\alpha^2 - 49)}{(\alpha^2 - 49)} - 3(\alpha + 4) = -2(\alpha + 4).
\end{aligned}
$$