R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

4. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16. *Polarkoordinaten*

Es sei die komplexe Zahl $z := \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt[4]{8}}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $|z|$ und $\arg(z)$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

(i) Ist n durch 4 teilbar, so gilt $z^n \in \mathbb{R}$ (d.h. der Imaginärteil von z^n verschwindet).

(ii) Ist n durch 8 teilbar, so gilt $z^n \in \mathbb{R}$ und $z^n > 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$|z| = \left|\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt[4]{8}}\right| = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\,|1+\mathrm{i}| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Da $\mathrm{Re}(z) > 0$ und $\mathrm{Im}(z) < 0$ sind, können wir $\arg(z)$ wie folgt berechnen:

$$\arg(z) = 2\pi - \arctan(1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

(b) Wie eben berechnet können wir z wie folgt in Polarkoordinaten schreiben:

$$z = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).$$

Es ist

$$z^n = 2^{-\frac{n}{4}}\left(\cos\left(\frac{7n\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7n\pi}{4}\right)\right). \tag{1}$$

(i) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $n = 4k$ gilt. Damit erhalten wir

$$z^n = z^{4k} = 2^{-\frac{4k}{4}}\left(\cos\left(\frac{7\cdot 4k\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\cdot 4k\pi}{4}\right)\right) = 2^{-k}\left(\cos(7k\pi) + \mathrm{i}\sin(7k\pi)\right).$$

$z^n \in \mathbb{R}$ folgt nun daraus, dass $\sin(7k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Sei nun n durch 8 teilbar, d.h. es gibt $k \in \mathbb{N}$, so dass $n = 8k$ gilt. Wir schreiben

$$z^n = z^{8k} = z^{2\cdot 4k} = \left(z^{4k}\right)^2.$$

Wir haben aber oben gesehen, dass $z^{4k} \in \mathbb{R}$ und $z^{4k} \neq 0$. Daraus folgt direkt die Behauptung.

Bemerkung: Hierdurch lassen sich nun z^{18} und z^{15} wie folgt berechnen.

Aus (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} z^{18} &= 2^{-\frac{18}{4}}\left(\cos\left(\frac{7\cdot 18\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\cdot 18\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{63\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{63\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

in Polarkoordinaten und

$$z^{18} = \frac{\sqrt{2}}{32}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{32}\left(0 + \mathrm{i}\cdot(-1)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{32}\mathrm{i}.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} z^{15} &= 2^{-\frac{15}{4}}\left(\cos\left(\frac{7\cdot 15\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\cdot 15\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^4}\left(\cos\left(\frac{105\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{105\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt[4]{2}}{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

in Polarkoordinaten und

$$z^{15} = \frac{\sqrt[4]{2}}{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{32}\left(1 + \mathrm{i}\right).$$

Aufgabe H 17. *Komplexe Wurzeln und Nullstellen*

Finden Sie alle komplexen Lösungen, w, der folgenden Gleichungen.

(a) $w^6 = -27\mathrm{i}$

(b) $w^3 + 32\sqrt{2}\mathrm{i} = 32\sqrt{2}$

(c) $w^2 - 2\mathrm{i}\sin(\vartheta)w - 1 = 0$, wobei $\vartheta \in \mathbb{R}$ ein Parameter sei.
Für welche ϑ ist $w \in \mathbb{R}$? Welche Werte kann w in diesem Fall annehmen?

Hinweis: Zur Berechnung komplexer Nullstellen dürfen Sie unser Zusatzmaterial verwenden.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $z = -27\mathrm{i}$, dann ist

$$|z| = \sqrt{27^2} = 27$$

und wir erhalten damit

$$z = -27\mathrm{i} = 27\left(0 + (-1)\mathrm{i}\right) = 27\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right), \quad \text{wobei} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Nach 1.8.4 sind die 6-ten komplexen Wurzeln von z dann gegeben durch

$$w_l = \sqrt[6]{27}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi l}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi l}{6}\right)\right) \quad \text{für} \quad l \in \{0,1,2,3,4,5\};$$

oder

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i} \\
w_1 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) \\
w_2 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) \\
w_3 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i} \\
w_4 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right) \\
w_5 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(b) Sei $z = 32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}\mathrm{i}$, dann ist

$$|z| = 32\sqrt{2+2} = 64$$

und wir erhalten damit

$$z = 32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}\mathrm{i} = 64\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{i}\right) = 64\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right), \quad \text{wobei} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Nach 1.8.4 sind die 3-ten komplexen Wurzeln von z dann gegeben durch

$$w_l = \sqrt[3]{64}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}\right)\right) \quad \text{für} \quad l \in \{0,1,2\};$$

oder

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 4\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) \\
w_1 &= 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\mathrm{i} \\
w_2 &= 4\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(c) Nach der Mitternachtsformel erhalten wir

$$w_{1,2} = \frac{1}{2}\left(2\mathrm{i}\sin(\vartheta) \pm \sqrt{-4\sin^2(\vartheta) + 4}\right) = \mathrm{i}\sin(\vartheta) \pm \cos(\vartheta)$$

Wir haben reelle Lösungen ($w \in \mathbb{R}$) nur wenn $\sin(\vartheta) = 0$, d.h., nur wenn $\vartheta = \pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall ist $w = \cos(\pi k) = \pm 1$.

Aufgabe H 18. *Faktorisierung reeller Polynome, Polynomdivision*

(a) Gegeben sei das Polynom $p(X) = X^5 - 5X^4 + 15X^2 + 5X - 4$.
Schreiben Sie p als Produkt von Linearfaktoren.

(b) Zu reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Polynomfunktion $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$f_{a,b}(X) = 3X^6 + 24X^4 + aX^3 - 33X^2 + b,$$

(i) Für die Polynome $f_{a,b}(X)$ und $g(X) = X^2 + 9$ bestimmen Sie die Polynome $p_{a,b}(X)$ und $r_{a,b}(X)$ mit $f_{a,b}(X) = p_{a,b}(X)g(X) + r_{a,b}(X)$, wobei $r_{a,b}(X)$ kleineren Grad besitzt als $g(X)$.

(ii) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das in (i) bestimmte Polynom $r_{a,b}(X) = 0$?

(iii) Schreiben Sie für die in (ii) gefundenen Werte von a und b das Polynom $f_{a,b}$ als Produkt von Linearfaktoren.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch Ausprobieren finden wir eine Nullstelle bei $X = -1$. Wir führen Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{rl}
X^5 - 5X^4 + 0X^3 + 15X^2 + 5X - 4 & : \ (X+1) = X^4 - 6X^3 + 6X^2 + 9X - 4 \\
\underline{X^5 + X^4} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & \\
-6X^4 + 0X^3 + 15X^2 + 5X - 4 & \\
\underline{-6X^4 - 6X^3} \qquad\qquad\qquad & \\
+6X^3 + 15X^2 + 5X - 4 & \\
\underline{+6X^3 + 6X^2} \qquad\qquad & \\
9X^2 + 5X - 4 & \\
\underline{9X^2 + 9X} \quad\;\; & \\
-4X - 4 & \\
\underline{-4X - 4} & \\
0 &
\end{array}$$

Für $X^4 - 6X^3 + 6X^2 + 9X - 4$ finden wir erneut durch Ausprobieren die Nullstelle $X = -1$ und Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{rl}
X^4 - 6X^3 + 6X^2 + 9X - 4 & : \ (X+1) = X^3 - 7X^2 + 13X - 4 \\
\underline{X^4 + X^3} \qquad\qquad\qquad\quad & \\
-7X^3 + 6X^2 + 9X - 4 & \\
\underline{-7X^3 - 7X^2} \qquad\qquad & \\
+13X^2 + 9X - 4 & \\
\underline{+13X^2 + 13X} \quad\;\; & \\
-4X - 4 & \\
\underline{-4X - 4} & \\
0 &
\end{array}$$

Für $X^3 - 7X^2 + 13X - 4$ finden wir erneut durch Ausprobieren die Nullstelle $X = 4$

und Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{l}
X^3-7X^2+13X-4 \ : \ (X-4) = X^2-3X+1 \\
\underline{X^3-4X^2} \\
\quad -3X^2+13X-4 \\
\quad \underline{-3X^2+12X} \\
\qquad\quad +X-4 \\
\qquad\quad \underline{+X-4} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Wir finden die Nullstellen von X^2-3X+1, indem wir die Mitternachtsformel verwenden:

$$X = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{9-4}) = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nun können wir p als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$p(X) = (X+1)^2(X-4)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

(b) **(i)** Wir führen Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{l}
3X^6+0X^5+24X^4+aX^3-33X^2+0X+b \ : \ (X^2+9) = 3X^4-3X^2+aX-6 \\
\underline{3X^6+0X^5+27X^4} \\
\qquad -3X^4+aX^3-33X^2+0X+b \\
\qquad \underline{-3X^4+0X^3-27X^2} \\
\qquad\qquad aX^3-6X^2+0X+b \\
\qquad\qquad \underline{aX^3+0X^2+9aX} \\
\qquad\qquad\quad -6X^2-9aX+b \\
\qquad\qquad\quad \underline{-6X^2+0X-54} \\
\qquad\qquad\qquad -9aX+b+54
\end{array}$$

Daher ist $f_{a,b}(X) = p_{a,b}(X)g(X) + r_{a,b}(X)$, wobei $p_{a,b} = 3X^4-3X^2+aX-6$ und $r_{a,b}(X) = -9aX+b+54$.

(ii) $r_{a,b}(X) = -9aX+b+54 = 0 \Rightarrow a = 0$ und $b = -54$.

(iii) Es sind $f_{0,-54}(X) = 3X^6+24X^4-33X^2-54$ und $p_{0,-54}(X) = 3X^4-3X^2-6 = 3(X^4-X^2-2)$. Für $p_{0,54}$ liefert die Mitternachtsformel $X^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+8}) = 2$ oder -1. Die Nullstellen von p sind daher $X = \sqrt{2}$, $X = -\sqrt{2}$, $X = \mathrm{i}$ und $X = -\mathrm{i}$.

Als Produkt von Linearfaktoren:

$$p_{0,-54}(X) = 3(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2}).$$

Außerdem ist $g(X) = X^2+9 = (X+3\mathrm{i})(X-3\mathrm{i})$. Zusammen haben wir

$$f_{0,-54}(X) = 3(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})(X+3\mathrm{i})(X-3\mathrm{i}).$$

Aufgabe H 19. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen jeweils auf Monotonie und Beschränktheit. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine obere Schranke, eine untere Schranke bzw. beides.

(a) $\left(1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\frac{3^n}{(n-1)!}\right)_{n\geqq 3}$ **(c)** $\left(\frac{n^2+2}{2^n+(-2)^n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n$. Für $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \begin{cases} 1-\left(\frac{3}{5}\right)^n & n=2k-1 \\ 1+\left(\frac{3}{5}\right)^n & n=2k \end{cases}$$

und $\left(\frac{3}{5}\right)^n \leqq \frac{3}{5}$ für $n\in\mathbb{N}$. Daher ist $\frac{2}{5} = 1-\frac{3}{5} \leqq a_n < 1$ für ungerade n. In ähnlicher Weise ist $1 < a_n \leqq 1+\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{34}{25}$ für gerade n. Insgesamt stellen wir fest, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist mit untere Schranke $\frac{2}{5}$ und obere Schranke $\frac{34}{25}$.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton, da sie zwischen Zahlen größer als 1 und kleiner als 1 hin und her springt. Z.B. sind die ersten Folgenglieder $\frac{2}{5}, \frac{34}{25}, \frac{98}{125}$.

(b) Wir betrachten die Folge $(b_n)_{n\geqq 3}$ mit $b_n := \frac{3^n}{(n-1)!}$. Die ersten Folgeglieder sind $\frac{27}{2}, \frac{27}{2}, \frac{81}{8}$. Zunächst bemerken wir, dass b_n immer positiv ist, daher ist 0 eine untere Schranke der Folge $(b_n)_{n\geqq 3}$. Wir untersuchen die Folge weiter, indem wir die Differenz $b_{n+1}-b_n$ betrachten:

$$b_{n+1}-b_n = \frac{3^{n+1}}{n!} - \frac{3^n}{(n-1)!} = \underbrace{\frac{3^n}{n!}}_{>0} \underbrace{(3-n)}_{\leqq 0 \text{ für } n\geqq 3} \leqq 0 \quad \text{für } n \geqq 3$$

Damit ist die Folge $(b_n)_{n\geqq 3}$ (nicht streng) monoton fallend, da $b_{n+1} \leqq b_n$ für $n\geqq 3$ gilt. Da die Folge monoton fallend ist, ist die obere Schranke gleich dem ersten Folgemitglied $b_3 = \frac{27}{2}$.

(c) Wir betrachten die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{n^2+2}{2^n+(-2^n)-1}$. Für $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$c_n = \begin{cases} -(n^2+2) & n=2k-1 \\ \frac{n^2+2}{2^{n+1}-1} & n=2k \end{cases}$$

und $2^{n+1} > 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Daher ist $c_n < 0$ für ungerade n und $c_n > 0$ für gerade n. Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton, da sie zwischen positiven und negativen Zahlen hin und her springt, z.B. sind die ersten Folgenglieder $-3, \frac{6}{7}, -11, \frac{18}{31}, -27$.
Die Teilfolge $(c_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend(*) und hat keine untere Schranke.
Die Teilfolge $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist auch streng monoton fallend(**), daher ist ihre obere Schranke gleich dem ersten Folgemitglied $c_2 = \frac{6}{7}$.
Insgesamt stellen wir fest, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist mit obere Schranke $\frac{6}{7}$.

(*) $(c_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend:
Sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} := (c_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$. Wir untersuchen die Monotonie, indem wir die Differenz

$d_{n+1} - d_n$ betrachten:

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n = -((n+1)^2 + 2) + (n^2 + 2) &= -n^2 - 2n - 3 + n^2 + 2 \\ &= -2n - 1 < 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend, da $d_{n+1} < d_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(**) $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend:
Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} := (c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wir untersuchen die Monotonie, indem wir die Differenz $e_{n+1} - e_n$ betrachten:

$$\begin{aligned} e_{n+1} - e_n &= \frac{(n+1)^2 + 2}{2^{n+2} - 1} - \frac{n^2 + 2}{2^{n+1} - 1} \\ &= \frac{(2^{n+1} - 1)(n^2 + 2n + 3) - (2^{n+2} - 1)(n^2 + 2)}{(2^{n+1} - 1)(2^{n+2} - 1)} \\ &= \frac{2^{n+1}(n^2 + 2n + 3) - n^2 - 2n - 3 - 2^{n+1}(2n^2 + 4) + n^2 + 2}{(2^{n+1} - 1)(2^{n+2} - 1)} \\ &= \frac{2^{n+1}(-n^2 + 2n - 1) - 2n - 1}{(2^{n+1} - 1)(2^{n+2} - 1)} \\ &= \frac{\overbrace{-2^{n+1}(n-1)^2 - 2n - 1}^{<0}}{\underbrace{(2^{n+1} - 1)(2^{n+2} - 1)}_{>0}} < 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend, da $e_{n+1} < e_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 20. *Mengen*

Skizzieren Sie die Menge

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 9\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+1)^2 \geqq \frac{1}{4}\right\}.$$

Lösungshinweise hierzu: