Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere bzw. untere Schranke an.

(a) $\left(n\left(\sin\left(\frac{(2n+3)\pi}{2}\right)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\dfrac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\dfrac{2n+1}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir nutzen die 2π-Periodizität $\sin(x+2\pi k)=\sin(x)$ für $k\in\mathbb{Z}$, um die Folge besser zu verstehen. Es ist

$$\sin\left(\frac{(2n+3)\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)$$
$$=\begin{cases}1 & \text{für } n= \text{ ungerade}\\ -1 & \text{für } n= \text{ gerade}\end{cases}=(-1)^n$$

Insgesamt ist

$$\left(\sin\left(\frac{(2n+3)\pi}{2}\right)\right)^n(-1)^{2n}=1$$

Also ist $(a_n)_n=(n)_n$.
Offensichtlich ist die Folge ist monoton und nach oben unbeschränkt, denn $a_k\to\infty$ für $k\to\infty$.
Eine untere Schranke ist hingegen durch 0 gegeben.

(b) Beachten Sie, dass jeder Term in der Folge positiv ist, da der Zähler $\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}>0$ und der Nenner $\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}>0$ ist.
Also erhalten wir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\mathrm{e}^{n+1}-\mathrm{e}^{-n-1}}{\mathrm{e}^{n+1}+\mathrm{e}^{-n-1}}\cdot\frac{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}=\frac{\mathrm{e}^{2n+1}+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2n-1}}{\mathrm{e}^{2n+1}-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2n-1}}$$
$$=\frac{A+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{A-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}},$$

mit $A=\mathrm{e}^{2n+1}-\mathrm{e}^{-2n-1}$.
Mit $a_{n+1},a_n>0$ und $A+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$ folgt $A-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}>0$. Hieraus ergibt sich wiederum mit $\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}>0>\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}$, dass der Zähler größer als der Nenner sein muss, und somit $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ gilt, die Folge steigt monoton.
Darüber hinaus haben wir

$$a_n=\frac{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{1-\mathrm{e}^{-2n}}\right).$$

Da $\mathrm{e}^{-2n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ gilt, folgt $a_n\to1$, die Folge daher konvergent und somit beschränkt.
Mit $\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}>\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}>0$ ist eine obere Schranke durch 1 gegeben, eine untere durch $a_1=\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}$, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigt.

(c) Es ist $a_n = \left(\frac{2n+1}{(2n)!}\right)$ und $a_{n+1} = \left(\frac{2n+3}{(2n+2)!}\right)$. Also,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+3}{(2n+2)!} - \frac{2n+1}{(2n)!} \\ &= \frac{2n+3-(2n+1)(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)!} \\ &= \frac{2n+3-8n^3-16n^2-10n-2}{(2n+2)!} \\ &= \frac{-8n^3-16n^2-8n+1}{(2n+2)!} \\ &= \frac{1-8n(n+1)^2}{(2n+2)!} < 0 \end{aligned}$$

da $8n(n+1)^2 > 1$ für $n \geqq 1$. Folglich ist die folge monoton fallend, womit eine obere Grenze durch $a_1 = \frac{3}{2}$ gegeben ist. Da ferner $\frac{2n+1}{(2n!)} > 0$ fÂ¿ür alle n gilt, ist die Folge auch beschränkt, eine untere Schranke ist beispielsweise 0.

Aufgabe H 22. *Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils zu jedem Häufungspunkt eine gegen diesen konvergierende oder gegebenenfalls eine bestimmt divergierende Teilfolge an.

(a) $\left(\sqrt{11(n+1)} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\frac{2\mathrm{e}^n - 3\mathrm{e}^{-n}}{3\mathrm{e}^n + 4\mathrm{e}^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^n)2^{-n/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hier nutzen wir eine Standardumformung, wie sie auch im Skript zu finden ist, bei der wir geschickt erweitern um die dritte binomische Formel verwenden zu können.

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{11(n+1)} - \sqrt{n} &= \frac{11(n+1)-n}{\sqrt{11(n+1)}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n\left(10+\frac{11}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{11+\frac{11}{n}}+1\right)} \\ &= \frac{\sqrt{n}\left(10+\frac{11}{n}\right)}{\left(\sqrt{11+\frac{11}{n}}+1\right)} \geqq \sqrt{n}\frac{10}{1+\sqrt{22}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$

Damit ist die gesamte Folge bestimmt divergent gegen $+\infty$, es liegt ein einziger, uneigentlicher Häufungspunkt in $+\infty$ vor.

(b) Hierfür gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\mathrm{e}^n - 3\mathrm{e}^{-n}}{3\mathrm{e}^n + 4\mathrm{e}^{-n}} \\ &= \frac{2-3\mathrm{e}^{-2n}}{3+4\mathrm{e}^{-2n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Damit ist gesamte Folge konvergent gegen $+\frac{2}{3}$, dies ist auch der einzige Häufungspunkt.

(c) Es ist $(1+\mathrm{i})^n = (\sqrt{2})^n\big(\cos(\frac{\pi}{4}n) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}n)\big)$. Also ist $\operatorname{Re}(1+\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\cos\big(\frac{\pi}{4}n\big)$. Somit ist $(a_n)_n = \big(\cos\big(\frac{\pi}{4}n\big)\big)_n$. Aufgrund der Peridoizität müssen wir nur die folgenden Teilfolgen betrachten: .

(i) $(a_{8k+1})_{k\in\mathbb{N}_0} = (\frac{\sqrt{2}}{2})_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ii) $(a_{8k+2})_{k\in\mathbb{N}_0} = (0)_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert 0.

(iii) $(a_{8k+3})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-\frac{\sqrt{2}}{2})_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(iv) $(a_{8k+4})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-1)_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert -1.

(v) $(a_{8k+5})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-\frac{\sqrt{2}}{2})_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(vi) $(a_{8k+6})_{k\in\mathbb{N}_0} = (0)_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert 0.

(vii) $(a_{8k+7})_{k\in\mathbb{N}_0} = (\frac{\sqrt{2}}{2})_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(viii) $(a_{8k+8})_{k\in\mathbb{N}_0} = (1)_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert 1.

Somit sind alle Häufungspunkte gegeben durch -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, es gibt kein $n\in\mathbb{N}$ für das a_n nicht zu einer der obigen Teilfolgen gehört.

Aufgabe H 23. *ε-Kriterium*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert a der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie jeweils speziell für $\varepsilon = 10^{-18}$ ein $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$.

(a) $a_n = 1000 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 999\left(\frac{1}{1000}\right)^k$ **(b)** $a_n = \dfrac{n^3-64}{27n^3}$

Hinweis: Teleskopsummen!

Lösungshinweise hierzu:

(a) Anhand der Teleskopsumme lässt sich dies leicht erkennen, es gilt

$$a_n = 1000 + \sum_{k=0}^{n}(1-1000)\left(\frac{1}{1000}\right)^k = 1000 + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1000}\right)^k - \underbrace{\left(\frac{1}{1000}\right)^{k-1}}_{=:b_k}$$
$$= 1000 + \left(\frac{1}{1000}\right)^n - \left(\frac{1}{1000}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1000}\right)^n$$

Damit ist – siehe 2.5.8 – $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Es ist

$$|a_n| \overset{!}{<} 10^{-18} \quad\Leftrightarrow\quad 10^{-3n} < 10^{-18} \quad\Leftrightarrow\quad 3n > 18 \Leftrightarrow \quad n > 6.$$

Also können wir zum Beispiel $n_\varepsilon = 10$ wählen.

(b) Es ist

$$a_n = \frac{n^3-64}{27n^3} = \frac{1}{27} - \frac{64}{27n^3}.$$

Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{27} - \frac{64}{27}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{27} - \frac{64}{27}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{=0}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \qquad = \frac{1}{27}$$

Es gelte

$$\left|a_n - \frac{1}{27}\right| \overset{!}{<} 10^{-18} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{64}{27n^3} < 10^{-18} \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt[3]{\frac{64}{27}\cdot 10^{18}} = \frac{4}{3}\cdot 10^6.$$

Da $\frac{4}{3} < 2$ ist, ist zum Beispiel $n_\varepsilon = 2000000$ eine geeignete Wahl.

Aufgabe H 24. *Konvergenz*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{100n^3 - 25}{20n^2 - 10\sqrt{n}}$

(b) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\dfrac{2n}{3^{n^2}}} + \dfrac{\sin(n)}{n}$

(c) $a_n = n^{\frac{1-n^2}{n}} \left(n^n - (n+1)^n\right)$

(d) $a_n = \dfrac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} + \dfrac{2n+1}{\pi n}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{100n^3 - 25}{20n^2 - 10\sqrt{n}} = \frac{(10n\sqrt{n} - 5)(10n\sqrt{n} + 5)}{2\sqrt{n}(10n\sqrt{n} - 5)} = \frac{10n\sqrt{n} + 5}{2\sqrt{n}} = \underbrace{5n}_{=:b_n} + \underbrace{\frac{5}{2\sqrt{n}}}_{=:c_n}.$$

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen Null: Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\frac{5}{2\sqrt{n}} \geqq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{2\varepsilon^2} \geqq n$$

es existiert also zu jedem $\varepsilon > 0$ mit $N_\varepsilon := \left\lceil \frac{5}{2\varepsilon^2} \right\rceil$ ein N_ε mit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > N_\varepsilon$. ($\lceil\cdot\rceil$ ist hierbei die obere Gaußklammer, welche einer reellen Zahl r die kleinste ganze Zahl k zuweist, welche größer r ist: $\lceil r\rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geqq r\}$.)
Insbesondere gibt es ein N, so dass $|c_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n > N$ und somit

$$b_n + c_n > 5n - \frac{1}{2}$$

gilt. Für jedes $s \in \mathbb{R}$ existiert ein N_s mit

$$\frac{s + \frac{1}{2}}{5} < N_s < n$$

für alle $n > N_s$ (Unbeschränktheit der natürlichen Zahlen), insbesondere gilt für alle $n > \tilde{N} := \max\{N_s, N\}$:

$$b_n + c_n > 5n - \frac{1}{2} > s$$

die Folge $(a_n)_n$ ist bestimmt divergent.

Alternativer Lösungsweg:

Alternativ lässt sich die Divergenz auch mittels der Abschätzung

$$a_n = 5n + \frac{1}{2\sqrt{n}} \geqq n$$

aus Lemma 2.5.5 und Beispiel 2.4.12(1) folgern.

(b) Wir können die Folgenglieder schreiben als

$$a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\frac{2n}{3^{n^2}}} + \frac{\sin(n)}{n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} + \frac{\sin(n)}{n} = b_n + c_n$$

mit $b_n := \left(-\frac{1}{3}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$ und $c_n := \frac{\sin(n)}{n}$. Wir untersuchen nun separat die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.
Da $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, folgt mit Beispiel 2.5.8.1, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Mit Beispiel 2.5.7 erhalten wir zudem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ und aus Beispiel 2.5.10 schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Mit den Grenzwertsätzen 2.5.3 folgt somit insgesamt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Betrachten wir nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir erhalten wegen $-1 \leqq \sin(n) \leqq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin(n)}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, folgt mit dem Sandwichsatz 2.5.6, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.
Mit den Grenzwertsätzen 2.5.3 folgt damit schließlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n = 0 + 0 = 0.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(c) Hier $a_n = n^{\frac{1-n^2}{n}} \left(n^n - (n+1)^n\right) = n^{1/n} \left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) := b_n c_n$,

wobei $b_n = n^{1/n}$ und $c_n = \left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir haben $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = 1 - \mathrm{e}$, dabei haben wir die Tatsache ausgenutzt, dass

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

gelten. Damit folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 - \mathrm{e}$.

(d) Wir schreiben die Folgenglieder als

$$a_n = \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} + \frac{2n+1}{\pi n} = b_n + c_n$$

mit $b_n = \dfrac{\sin(n^2+1)}{n^2+1}$ und $c_n = \frac{2n+1}{\pi n}$. Wir untersuchen nun separat die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

Betrachten wir nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir erhalten wegen $-1 \leqq \sin(n^2+1) \leqq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$-\frac{1}{n^2+1} \leqq \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} \leqq \frac{1}{n^2+1}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$, folgt mit dem Sandwichsatz, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} = 0$.

Für c_n gilt $c_n = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{1}{\pi n} \to \dfrac{2}{\pi}$ für $n \to \infty$. Mit Satz 2.5.3 folgt damit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n + \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{2}{\pi}$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 25. *Teleskopsummen*

(a) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{(k+2)^2} - \frac{1}{(k+3)^2} \right)$.

(b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \right)$.

Wir erwarten nicht nur das Ergebnis sondern auch einen nachvollziehbaren Rechenweg, der die Teleskopsummenformel mit einbezieht.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir haben

$$\sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{(k+2)^2} - \frac{1}{(k+3)^2} \right) = \frac{1}{(1+2)^2} - \frac{1}{((15+1)+2)^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{324} = \frac{35}{324}.$$

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \right) &= \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{99} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k} \right) = (\sqrt{99+1}-\sqrt{1}) \\
&= 10-1 = 9.
\end{aligned}$$