Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 26. *Sandwichsatz*

Bestimmen Sie mit Hilfe des Sandwichsatzes die Grenzwerte der folgenden Folgen:

(a) $\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}^n + \pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\left(1 - \dfrac{1}{n^2 - 4n - 5.1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\dfrac{n^2 + 5\sin(n)}{3n^2 - 4\cos(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2 + 4k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Hinweis zu (b): Nutzen Sie für die untere Abschätzung Bernoulli.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gelten $2 < \mathrm{e} < 3 < \pi$ und somit

$$\sqrt[n]{\mathrm{e}^n + \pi^n} \geqq \sqrt[n]{\pi^n} = \pi \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{\mathrm{e}^n + \pi^n} \leqq \sqrt[n]{2 \cdot \pi^n} = \sqrt[n]{2}\pi \to \pi \quad \text{für } n \to \infty.$$

Mit dem Sandwichsatz folgt daher $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}^n + \pi^n} = \pi$.

(b) Wegen $n^2 - 4n - 5.1 = (n-2)^2 - 9.1 \geqq 16 - 9.1 > 1 > 0$ für $n > 5$ folgt direkt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2 - 4n - 5.1}\right)^n \leqq 1^n = 1.$$

für $n > 5$. Weiter gilt $x = -\frac{1}{n^2-4n-5.1} = -\frac{1}{(n-2)^2-9.1} \geqq -\frac{10}{91} > -1$ und daher folgt aus der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(1 - \frac{1}{n^2 - 4n - 5.1}\right)^n = (1+x)^n \geqq 1 + nx = 1 - \frac{n}{n^2 - 4n - 5.1} = 1 - \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{4}{n} - \frac{51}{10n^2}} \to 1$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2-4n-5.1}\right)^n = 1$.

(c) Es gelten

$$\frac{n^2 + 5\sin(n)}{3n^2 - 4\cos(n)} \geqq \frac{n^2 - 5}{3n^2 + 4} = \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} \to \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{n^2 + 5\sin(n)}{3n^2 - 4\cos(n)} \leqq \frac{n^2 + 5}{3n^2 - 4} = \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{3 - \frac{4}{n^2}} \to \frac{1}{3}$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+5\sin(n)}{3n^2-4\cos(n)} = \frac{1}{3}$.

(d) Wegen $3(n+1)^2 + 4k \geqq 3(n+1)^2$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2 + 4k} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2} = \frac{1}{3(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3(n+1)^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6} \frac{n}{n+1} \to \frac{1}{6}$$

für $n \to \infty$. Weiter gilt für $k \leqq n$

$$3(n+1)^2 + 4k \leqq 3(n+1)^2 + 4n = 3n^2 + 10n + 3$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2+4k} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3n^2+10n+3} = \frac{1}{3n^2+10n+3} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3n^2+10n+3} \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n^2+n}{6n^2+20n+6} = \frac{1+\frac{1}{n}}{6+\frac{20}{n}+\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{6}$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2+4k} = \frac{1}{6}$.

Aufgabe H 27. *Teleskopreihen*

Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}$

Hinweis: Schreiben Sie die Folge der Partialsummen als Folge (ggf. mehrererer) Teleskopsummen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}} &= \frac{1}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}} \cdot \frac{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}}{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}} \\
&= \frac{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}}{(k+2)^2k-k^2(k+2)} \\
&= \frac{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}}{2k(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+2}}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2} = \frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+2)} - \frac{1}{2}\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{1+1} \right) = \frac{1}{4},$$

und daher

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)} &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&\to \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Aufgabe H 28. *Geometrische Reihe*

Sei $x \in (1, \infty)$. Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} \right) \right)^k$ **(b)** $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{k+1}{4}}$ **(c)** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x-2} \right)^k$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} \right) \right)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{k+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{k+1}{4}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{k+4}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}} \right)^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4^{1/4}}} = \frac{1}{4 - 4^{3/4}} \\
&= \frac{4 + 4^{\frac{3}{4}}}{16 - 4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} + 2^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^5}.
\end{aligned}$$

(c) Wegen $x > 1$ gilt $(3x-2) - (2x-1) = x - 1 > 0$ und somit $\left| \frac{2x-1}{3x-2} \right| < 1$. Daher folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x-2} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{2x-1}{3x-2}} = \frac{3x-2}{3x-2-(2x-1)} = \frac{3x-2}{x-1}.$$

Aufgabe H 29. *Folgen komplexer Zahlen*

Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn sowohl $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ als auch $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$ gilt.Gibt es kein solches $z \in \mathbb{C}$, dann nennt man die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Sie können dabei ohne Beweis nutzen, dass 2.5.3, 2.5.4 und 2.5.8.1 auch für komplexe Zahlenfolgen gelten.

(a) $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^n$

(b) $b_n = \frac{n\mathrm{i}+2n^2}{(7n^2)\mathrm{i}-3}$

(c) $c_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)^k$

(d) $d_n = \min\left\{\operatorname{Im} w \,\middle|\, w^n = 3+3\sqrt{3}\mathrm{i}\right\}$

Hinweis zu (d): Begründen Sie zunächst, dass für jedes n und jedes $\alpha_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right)$ ein $j \in \{0,1,2,...n-1\}$ mit $\alpha_0 + j\frac{2\pi}{n} \in \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right)$ existiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6})$ und daher infolge der Periodizität

$$\operatorname{Re}(a_{12k+j}) = \cos\left(\frac{\pi j}{6}\right) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } j \in \{1,2,3,\ldots,12\}.$$

Wegen $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \neq -1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)$ hat die Folge $\left(\operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens 2 verschiedene Häufungspunkte und kann damit nicht konvergieren. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert also.

(b) Es gilt

$$\frac{n\mathrm{i}+2n^2}{-(7n^2)\mathrm{i}-3} = \frac{(n\mathrm{i}+2n^2)((7n^2)\mathrm{i}+3)}{49n^4+9} = \frac{(14n^4+7n^3+3n)\mathrm{i}-7n^3+6n^2}{49n^4+9}$$
$$= \underbrace{\frac{-\frac{7}{n}+\frac{6}{n^2}}{\frac{9}{n^4}+49}}_{\to 0} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{\frac{3}{n^3}+\frac{7}{n}+14}{\frac{9}{n^4}+49}}_{\to -\frac{14}{49}} \to -\frac{14}{49}\mathrm{i} = -\frac{2}{7}\mathrm{i}$$

für $n \to \infty$.

(c) Mit $q := \frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$ gilt, wie für reelle Zahlen, analog zu Beispiel 2.8.5

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q}q^n$$

und es genügt die Folge mit Folgengliedern $\tilde{c}_n := q^n = \left(\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)^n$ auf Konvergenz zu untersuchen. Dazu berechnen wir

$$|q| = \left|\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right| = \frac{3}{|3+\mathrm{i}|} = \frac{3}{\sqrt{9+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}} < \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

und wegen 2.5.8.1 folgt daraus $\lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n = 0$. Insbesondere folgt damit

$$\sum_{k=2}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+2} = q^2\frac{1}{1-q} - q^2\frac{q}{1-q}\underbrace{\tilde{c}_n}_{\to 0} \to \frac{1}{1-q} = \frac{\left(\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)^2}{1-\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}} = -\frac{99}{130} - \frac{27}{130}\mathrm{i}.$$

(d) Wir zeigen zunächst: Für alle n existiert ein $j \in \{0,...,n-1\}$ mit

$$\alpha_0 + \frac{2\pi j}{n} \in \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right).$$

Ist $n=1$, kommt nur $j=0$ in Frage und die Behauptung folgt wegen

$$\alpha_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right) \subseteqq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi\right)$$

Für $n>1$ nehmen wir an, die Behauptung sei falsch, das heißt, kein $\alpha_j = \alpha_0 + \frac{2\pi j}{n}$ liegt in dem Intervall $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right)$. Wegen

$$\alpha_0 + \frac{2\pi(n-1)}{n} \leqq \frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \alpha_0 < \frac{3}{2}\pi - 2\pi < 0$$

folgt einerseits $\alpha_{n-1} \geqq \frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}$, andererseits gilt

$$\alpha_0 < \frac{2\pi}{n} \leqq \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}.$$

Damit existiert ein kleinstes j mit $\alpha_j \leqq \frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}$, für welches insbesondere $j < n-1$ gilt. Nach der Annahme gilt $\alpha_{j+1} \geqq \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}$ und somit:

$$\frac{2\pi}{n} = \alpha_{j+1} - \alpha_j \geqq \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n} - \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{4\pi}{n}$$

Dies ist ein Widerspruch, mindestens ein α_j muss im Intevall $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right)$ liegen.

Es gilt $|3+3\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$ und damit

$$3+3\sqrt{3}\mathrm{i} = 6\left(\frac{\sqrt{1}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Die n-ten Wurzeln $w_0, \ldots, w_{n-1}$ von $3+3\sqrt{3}\mathrm{i}$ sind daher gegeben durch

$$w_j = \sqrt[n]{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3n} + j\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3n} + j\frac{2\pi}{n}\right)\right).$$

Der Imaginärteil einer solchen Wurzel ist

$$\operatorname{Im} w_j = \sqrt[n]{6}\sin\left(\frac{\pi}{3n} + j\frac{2\pi}{n}\right).$$

Damit können wir d_n darstellen als

$$d_n = \sqrt[n]{6}\min\left\{\sin\left(\frac{\pi}{3n} + j\frac{2\pi}{n}\right) \,\middle|\, j \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}.$$

Insbesondere haben bekommen wir für $n>1$ infolge der Monotonie der Sinusfunktion auf $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi\right]$ und $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right)$ mit unserer Hilfsaussage

$$\begin{aligned} d_n &\leqq \sqrt[n]{6}\max\left\{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}\right)\right\} \\ &= \underbrace{\sqrt[n]{6}}_{\to 1}\max\left\{\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \underbrace{\frac{2\pi}{n}}_{\to 0}\right)}_{\to -1}, \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \underbrace{\frac{2\pi}{n}}_{\to 0}\right)}_{\to -1}\right\} \to -1, \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ und wegen $\cos(x) \geqq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$-1 \leqq d_n \leqq \sqrt[n]{6} \to -1 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Mit dem Sandwichsatz folgt daher $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = -1$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 30. *Komplexe Zahlen, Polarkoordinaten*

Ordnen Sie die Zahlen $\{6-5\mathrm{i},\ -8+5\mathrm{i},\ 3.1+4\mathrm{i}$ und $-8-3\mathrm{i}\}$ jeweils ihren näherungsweise angegebenen Argumenten und Beträgen zu:

$$\arg(z) \in \{0.290\pi\,,\ 0.822\pi\,,\ 1.114\pi\,,\ 1.779\pi\}$$
$$|z| \in \{5.06\,,\ 7.81\,, 8.54\,,\ 9.43\}$$

Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$\begin{aligned}
|6-5\mathrm{i}| &= \sqrt{6^2+5^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{51} \Rightarrow 7 < |6-5\mathrm{i}| < 8\\
|-8+5\mathrm{i}| &= \sqrt{8^2+5^2} = \sqrt{64+25} = \sqrt{90} \Rightarrow 9 < |-8+5\mathrm{i}| < 10\\
|3.1+4\mathrm{i}| &= \sqrt{3.1^2+4^2} = \sqrt{9.61+16} = \sqrt{25.61} \Rightarrow 5 < |3.1+4\mathrm{i}| < 6\\
|-8-3\mathrm{i}| &= \sqrt{8^2+3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} \Rightarrow 8 < |-8-3\mathrm{i}| < 9
\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen mit positiven Real- und Imaginärteil liegen im 1. Quadranten der komplexen Ebene, das Argument der komplexen Zahl liegt also zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Somit ist $0 < \arg(3.1+4\mathrm{i}) \approx 0.290\pi < \frac{\pi}{2}$. Analog folgen $\arg(6-5\mathrm{i}) \approx 1.779\pi$ (4. Quadrant), $\arg(-8+5\mathrm{i}) \approx 0.822\pi$ (2. Quadrant) und $\arg(-8-3\mathrm{i}) \approx 1.114\pi$ (3. Quadrant).
Somit haben die komplexen Zahlen näherungsweise die folgenden Polarkoordinatendarstellungen:

$$\begin{aligned}
6-5\mathrm{i} &\approx 7.81\,(\cos(1.779\pi) + \mathrm{i}\sin(1.779\pi))\\
-8+5\mathrm{i} &\approx 9.43\,(\cos(0.822\pi) + \mathrm{i}\sin(0.822\pi))\\
3.1+4\mathrm{i} &\approx 5.06\,(\cos(0.290\pi) + \mathrm{i}\sin(0.290\pi))\\
-8-3\mathrm{i} &\approx 8.54\,(\cos(1.114\pi) + \mathrm{i}\sin(1.114\pi))
\end{aligned}$$