Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31. *Untervektorräume*

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $U_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x < 2, y \leqq 0\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) $U_2 := \left\{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten.

(c) $U_3 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle x \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, z\rangle = 0\right\}$ für festen Vektoren $y, z \in \mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

(d) $U_4 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) = 0\}$ ist ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

(i) Seien $(x_1,y_1) = (1,0) \in U_1$ und $(x_2,y_2) = (1,0) \in U_1$, dann ist $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (2,0) \notin U_1$, da $2 < 2$ gilt nicht.

(ii) Seien $(x,y) = (1,0) \in U_1$ und $s = -1 \in \mathbb{R}$, dann ist $s(x,y) = (-1,0) \notin U_1$.

(iii) Es gilt $(0,0) \in U_1$.

Kriteria (i) und (ii) sind nicht erfüllt. Daher ist U_1 kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b)

(i) Seien $f(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \in U_2$ und $g(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \in U_2$, dann ist $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (a_1+a_2)x^3 + (b_1+b_2)x^2 + (c_1+c_2)x + (d_1+d_2) \in U_2$.

(ii) Seien $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in U_2$ und $s \in \mathbb{R}$, dann ist $(sf)(x) = sf(x) = sax^3 + sbx^2 + scx + sd \in U_2$.

(iii) Das Nullpolynom, also der Nullvektor des Vektorraums $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$, besitzt Grad $-\infty < 3$ (Definition 1.8.11), daher liegt der Nullvektor von $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$ in U_2.

Alle Kriteria sind erfüllt. Daher ist U_2 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c)

(i) Seien $x_1 \in U_3$ und $x_2 \in U_3$, dann ist $x_1 + x_2 \in U_3$, da $\langle x_1 + x_2 \,|\, y\rangle = \langle x_1 \,|\, y\rangle + \langle x_2 \,|\, y\rangle = 0 + 0 = 0$ und $\langle x_1 + x_2 \,|\, z\rangle = \langle x_1 \,|\, z\rangle + \langle x_2 \,|\, z\rangle = 0$ gelten.

(ii) Seien $x \in U_3$ und $s \in \mathbb{R}$, dann ist $sx \in U_3$, da $\langle sx \,|\, y\rangle = s\,\langle x \,|\, y\rangle = s \cdot 0 = 0$ und $\langle sx \,|\, z\rangle = s\,\langle x \,|\, z\rangle = 0$ gelten.

(iii) Es gilt $(0,0,\ldots,0) \in U_3$, da $\langle (0,0,\ldots,0) \,|\, y\rangle = \langle (0,0,\ldots,0) \,|\, z\rangle = 0$.

Alle Kriteria sind erfüllt. Daher ist U_3 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d)

(i) Für $z = x + y\mathrm{i}, w = u + v\mathrm{i} \in U_4$ gilt $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = x + y = 0$ bzw. $\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = u + v = 0$. Da $z + w = (x+u) + (y+v)\mathrm{i}$ ist, gilt $\operatorname{Re}(z+w) + \operatorname{Im}(z+w) = x + u + y + v = 0$ und folglich $z + w \in U_4$.

(ii) Für $z = x + y\mathrm{i} \in U_4$ und $s = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ gilt $sz = ax - by + (bx + ay)\mathrm{i}$ und damit $\operatorname{Re}(sz) + \operatorname{Im}(sz) = ax - by + bx + ay$. Da $z := 1 - \mathrm{i} \in U_4$ und $i \in \mathbb{C}$ gilt, aber $\mathrm{i}z = 1 + \mathrm{i} \notin U_4$ ist (, weil $\operatorname{Re}(\mathrm{i}z) + \operatorname{Im}(\mathrm{i}z) = 1 + 1 = 2 \neq 0$), kann U_4 kein $\mathbb{C}$-Vektorraum sein.

(iii) Es gilt $\operatorname{Re}(0) + \operatorname{Im}(0) = 0 + 0 = 0$ und folglich $0 \in U_4$.

Kriterium (ii) ist nicht erfüllt. Daher ist U_4 kein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Aufgabe H 32. *Skalarprodukt*

Sei $\operatorname{Pol}_4 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^4 \alpha_j x^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$. Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt auf $\operatorname{Pol}_4 \mathbb{R}$:

$\langle p \,|\, q \rangle = \displaystyle\int_0^\beta p(x)q(x) \,\mathrm{d}\,x$ für $p, q \in \operatorname{Pol}_4 \mathbb{R}$ und $\beta > 0$.

Gegeben seien die folgende Polynome: $p_1(x) = x^2 - x - 1, \quad p_2(x) = 2x - 1$.

(a) Bestimmen Sie $|p_1|^2$, $|p_2|^2$ und $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle$.

(b) Für welche β ist $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle = 0$?

(c) Sei nun $\beta = 1$. Bestimmen Sie $c_1 \in \mathbb{R}$ und $c_0 \neq 0$ so, dass das Polynom $q(x) = 3x^2 + c_1 x + c_0$ die Gleichung $|q - p_2|^2 = |q|^2 + |p_2|^2$ erfüllt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mittels Integration folgt

$$
\begin{aligned}
|p_1|^2 = \langle p_1 \,|\, p_1 \rangle &= \int_0^\beta (x^2 - x - 1)^2 \,\mathrm{d}\,x = \int_0^\beta x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{5}\beta^5 - \frac{1}{2}\beta^4 - \frac{1}{3}\beta^3 - \beta^2 + \beta. \\
|p_2|^2 = \langle p_2 \,|\, p_2 \rangle &= \int_0^\beta (2x-1)^2 \,\mathrm{d}\,x = \int_0^\beta 4x^2 - 4x + 1 \,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3}\beta^3 - 2\beta^2 + \beta. \\
\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle &= \int_0^\beta (x^2 - x - 1)(2x - 1) \,\mathrm{d}\,x = \int_0^\beta 2x^3 - 3x^2 - x + 1 \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\beta^4 - \beta^3 - \frac{1}{2}\beta^2 + \beta.
\end{aligned}
$$

(b) Es ist

$$
\begin{aligned}
\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle = \frac{1}{2}\beta^4 - \beta^3 - \frac{1}{2}\beta^2 + \beta &= \frac{\beta}{2}\left(\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 2\right) \\
&= \frac{\beta}{2}(\beta - 1)\left(\beta^2 - \beta - 2\right) \\
&= \frac{\beta}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)(\beta + 1)
\end{aligned}
$$

Da das Skalarprodukt nur für $\beta > 0$ definiert ist, ist $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle = 0$ nur wenn $\beta = 1$ oder $\beta = 2$.

(c) Zuerst bemerken wir, dass $|q - p|^2 = |q|^2 + |p|^2 - 2\langle q \,|\, p \rangle$ und damit $|q - p|^2 = |q|^2 + |p|^2 \Leftrightarrow \langle q \,|\, p \rangle = 0$. Daher suchen wir nach ein Polynom $q(x) = 3x^2 + c_1 x + c_0$, das $\langle q \,|\, p_2 \rangle = 0$ erfüllt. Es ist

$$
\begin{aligned}
\langle q \,|\, p_2 \rangle &= \int_0^1 (3x^2 + c_1 x + c_0)(2x - 1) \,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^1 6x^3 + (2c_1 - 3)x^2 + (2c_0 - c_1)x - c_0 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{3}{2} + \frac{2c_1 - 3}{3} + \frac{2c_0 - c_1}{2} - c_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}c_1.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $\langle q \,|\, p_2 \rangle = 0$ genau dann gilt, wenn $c_1 = -3$. Die Konstante c_0 darf eine beliebige reelle Zahl sein. Daher ist z.B. $3x^2 - 3x + 1$ ein Polynom q, das $|p - q|^2 =$

$|p|^2 + |q|^2$ und $c_0 \neq 0$ erfüllt.
Alternativ:
Es ist

$$
\begin{aligned}
|q-p_2|^2 &= \langle\, q-p_2 \,|\, q-p_2 \rangle \\
&= \int_0^1 (3x^2+(c_1-2)x+c_0+1)^2 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^1 9x^4+6(c_1-2)x^3+(6c_0+6+(c_1-2)^2)x^2+2(c_1-2)(c_0+1)x+(c_0+1)^2 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{9}{5}+\frac{3}{2}(c_1-2)+2c_0+2+\frac{c_1^2-4c_1+4}{3}+c_1c_0+c_1-2c_0-2+c_0^2+2c_0+1 \\
&= \frac{9}{5}-1+\frac{1}{3}+\frac{7}{6}c_1+2c_0+\frac{c_1^2}{3}+c_0c_1+c_0^2, \\
|q|^2 &= \langle\, q \,|\, q \rangle \\
&= \int_0^1 (3x^2+c_1x+c_0)^2 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^1 9x^4+6c_1x^3+(6c_0+c_1^2)x^2+2c_0c_1x+c_0^2 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{9}{5}+\frac{3c_1}{2}+2c_0+\frac{c_1^2}{3}+c_0c_1+c_0^2 \\
&= \frac{9}{5}+\frac{3}{2}c_1+2c_0+\frac{c_1^2}{3}+c_0c_1+c_0^2, \\
|p_2|^2 &= \frac{4}{3}-2+1=\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Wir wollen $|q-p|^2 = |q|^2 + |p|^2$, also

$$
\begin{aligned}
\frac{9}{5}-1+\frac{1}{3}+\frac{7}{6}c_1+2c_0+\frac{c_1^2}{3}+c_0c_1+c_0^2 &= \frac{9}{5}+\frac{3}{2}c_1+2c_0+\frac{c_1^2}{3}+c_0c_1+c_0^2+\frac{1}{3} \\
\Rightarrow -1+\frac{7}{6}c_1 &= \frac{3}{2}c_1 \\
\Rightarrow -1 &= \frac{2}{6}c_1 \Rightarrow c_1 = -3,\ c_0 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Daher ist z.B. $3x^2-3x+2$ ein Polynom q, das $|p-q|^2 = |p|^2+|q|^2$ und $c_0 \neq 0$ erfüllt.

Aufgabe H 33. *Ebenen und Geraden*

(a) Gegeben seien $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$

- **(i)** An welchem Punkt schneiden sich die Geraden? Bei welchem γ ist dies der Fall?
- **(ii)** Bestimmen Sie die Ebene , die die Geraden g und h_γ enthält.

(b) Gegeben seien die Punkte $A = (5,3,1),\ B = (7,10,2),\ C = (9,6,4)$. Berechnen Sie

- **(i)** den Umfang des Dreiecks ABC.
- **(ii)** den Kosinus jedes der Innenwinkel des Dreiecks.

Lösungshinweise hierzu:

(a) (i) Die Geraden g und h schneiden sich wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -\gamma \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aus den ersten und dritten Zeilen erhalten wir $4\lambda - 2\mu - 2 - 6\lambda + 2\mu + 4 = 0 \Rightarrow -2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$. Setzen wir dies in die dritte Zeile ein, so ergibt sich $\mu = 1$. Schließlich setzen wir $\lambda = \mu = 1$ in die zweite Zeile ein, so ergibt sich $\gamma = 7$. Also schneiden sich die beiden Geraden genau dann im Punkt $(5, 3, 1)^\intercal$, wenn $\gamma = 7$.

(ii) Da eine Ebene, die sowohl g als auch h enthält, insbesondere g enthalten und zu h parallel sein muss, ist der einzige Kandidat die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Wenn nun irgendein Punkt von h in E liegt, so liegt ganz h in E. Die Geraden g und h sind nicht parallel, da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind. Daher liegen g und h genau dann in einer Ebene, wenn sie sich schneiden, d.h. nur wenn $\gamma = 7$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(b) (i) Die Kantenlängen sind gerade die Längen der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6},$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{34},$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| == \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Der Umfang des Dreiecks ist daher $\sqrt{34} + 5\sqrt{6}$.

(ii) Wir bezeichnen den Winkel bei A mit α, den Winkel bei B mit β und den Winkel bei C mit γ. Dann ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC} \rangle}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{34}} = \frac{32}{3 \cdot 2\sqrt{3}\sqrt{17}} = \frac{16}{3\sqrt{51}},$$

$$\cos(\beta) = \frac{\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{BA} \rangle}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6}} = \frac{22}{6 \cdot 6} = \frac{11}{18},$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle \overrightarrow{CB} | \overrightarrow{CA} \rangle}{|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{34}} = \frac{2}{2 \cdot 2\sqrt{3}\sqrt{17}} = \frac{1}{2\sqrt{51}}.$$

Aufgabe H 34. *Lineare Unabhängigkeit und lineare Hülle*

(a) Sei $w_1 = (3, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ und $w_2 = (-10, 3, 6) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Sind w_1 und w_2 linear unabhängig?

(ii) Zeigen Sie, dass $u = (-8, 2, 20) \in L(w_1, w_2)$ gilt, aber $v = (24, -8, 3) \in L(w_1, w_2)$ gilt nicht.

(b) Gegeben seien $v_1 = (1, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})$, $v_2 = (1 + 3\mathrm{i}, 4 + 2\mathrm{i}, 5\mathrm{i})$, $v_3 = (2 - \mathrm{i}, -\mathrm{i}, 3) \in \mathbb{C}^3$. Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, wenn man $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet?

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Die Vektoren w_1 und w_2 sind linear unabhängig, wenn $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = 0$ nur gilt, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Es ist

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \begin{pmatrix} 3\alpha_1 - 10\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 12\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

Daher sind w_1 und w_2 linear unabhängig.

(ii) Es gilt

$$4w_1 + 2w_2 = \begin{pmatrix} 12 - 20 \\ -4 + 6 \\ 8 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u \in L(w_1, w_2)$.

Angenommen $v \in L(w_1, w_2)$ dann gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 3\alpha_1 - 10\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aus den ersten und zweiten Zeilen erhalten wir $3\alpha_1 - 10\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3 \cdot 3\alpha_2 = 24 - 8 \cdot 3 \Rightarrow -\alpha_2 = 0$. Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein so folgt $\alpha_1 = \frac{3}{2}$. Setzen wir $\alpha_2 = 0$ jedoch in die zweite Gleichung ein so folgt $\alpha_1 = 8 \neq \frac{3}{2}$. Damit ist gezeigt, dass unsere Annahme $v \in L(w_1, w_2)$ nicht gilt.

(b) Um zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3 linear (un)abhängig sind, betrachten wir $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ mit $c_2, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + (1+3\mathrm{i})c_2 + (2-\mathrm{i})c_3 &= 0 \\ \mathrm{i}c_1 + (4+2\mathrm{i})c_2 - \mathrm{i}c_3 &= 0 \\ (1+\mathrm{i})c_1 + 5\mathrm{i}c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung gewinnen wir $c_1 = c_3 - (-\mathrm{i})(4+2\mathrm{i})c_2 = c_3 + (-2+4\mathrm{i})c_2$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} c_3 + (-2+4\mathrm{i})c_2 + (1+3\mathrm{i})c_2 + (2-\mathrm{i})c_3 = 0 &\Rightarrow (-1+7\mathrm{i})c_2 + (3-\mathrm{i})c_3 = 0 \\ &\Rightarrow c_3 = \frac{1-7\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = (1-2\mathrm{i})c_2. \end{aligned}$$

Dies ergibt dann $c_1 = (1-2\mathrm{i})c_2 + (-2+4\mathrm{i})c_2 = (-1+2\mathrm{i})c_2$. Einsetzen in die dritte Gleichung liefert schließlich

$$(1+\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})c_2 + 5\mathrm{i}c_2 + 3(1-2\mathrm{i})c_2 = 0 \Rightarrow (-3+\mathrm{i})c_2 + (3-\mathrm{i})c_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Das bedeutet $(-1+2\mathrm{i})c_2v_1 + c_2v_2 + (1-2\mathrm{i})c_2v_3 = 0 \ \forall c_2 \in \mathbb{C}$. Damit sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig. Insbesondere kann man $c_1 = -1+2\mathrm{i}, c_2 = 1, c_3 = 1-2\mathrm{i}$ oder $c_1 = 5, c_2 = 1+2\mathrm{i}, c_3 = -5$ wählen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 35. *Summen*

Vereinfachen Sie soweit wie möglich: $$\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{j=2}^{n+2}\frac{n!\cdot 2^{2-n-j}}{(j-2)!(n-j+2)!}\right).$$

Lösungshinweise hierzu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{j=2}^{n+2}\frac{n!\cdot 2^{2-n-j}}{(j-2)!(n-j+2)!}\right) &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}2^{-(n+k)}\right) \qquad (k = j-2) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\right) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\right) \\ \text{(1.3.5 Binomischer Lehrsatz)} \qquad &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^{n} \\ &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \\ \text{(2.8.4 Geometrische Reihe Beweis)} \qquad &= \frac{1}{8}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{16}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{16}\right). \end{aligned}$$