Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 36. *Vektorraum der Polynome*

Es sei $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Polynome p mit Grad kleiner oder gleich 2.

(a) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Pol} \mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_1(X) = 3X^2 + 2X + 6$, $p_2(X) = X - 1$ und $p_3(X) = X^2 + X + 2$ linear unabhängig sind.

(c) Stellen Sie das Polynom $q(X) = X$ als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 dar.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir müssen folgende grundlegenden Bedingungen für einen Untervektorraum prüfen:

(i) Das Nullpolynom, das durch $p(X) = 0$ beschrieben wird, hat den symbolischen Grad $-\infty$ und ist somit ein Polynom vom Grad $\leqq 2$.

(ii) Seien $P_1(X), P_2(X) \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$. Dann können wir diese Polynome schreiben als $P_1(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$, und $p_2(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0$ mit $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Die Summe

$$p_1(X) + p_2(X) = (a_2 + b_2)X^2 + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0),$$

ist wieder ein Polynom vom Grad höchstens 2. Daher ist die Menge $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ unter er Addition abgeschlossen.

(iii) Sei $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ ein Polynom in $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Das Produkt

$$c \cdot p(X) = c \cdot a_2X^2 + c \cdot a_1X + c \cdot a_0,$$

ist ebenfalls Polynom vom Grad höchstens 2. Daher ist $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ auch unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

(b) Um zu zeigen, dass die Polynome $p_1(X) = 3X^2 + 2X + 6$, $p_2(X) = X - 1$ und $p_3(X) = X^2 + X + 2$ linear unabhängig sind, müssen wir zeigen, dass die Gleichung $c_1p_1(X) + c_2p_2(X) + c_3p_3(X) = 0$ nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ hat. Wir schreiben die Linearkombination der drei Polynome:

$$\begin{aligned} 0 &= c_1(3X^2 + 2X + 6) + c_2(X - 1) + c_3(X^2 + X + 2) \\ &= 3c_1X^2 + 2c_1X + 6c_1 + c_2X - c_2 + c_3X^2 + c_3X + 2c_3\,. \end{aligned}$$

Nun ordnen wir die Terme nach den Potenzen von X, Die Gleichung lautet also

$$(3c_1 + c_3)X^2 + (2c_1 + c_2 + c_3)X + (6c_1 - c_2 + 2c_3) = 0$$

Damit die Gleichung für alle X gilt, müssen die Koeffizienten jeder Potenz von X gleich Null sein:

(i) Aus $3c_1 + c_3 = 0$ folgt $c_3 = -3c_1$.

(ii) In $2c_1 + c_2 + c_3 = 0$ setzen wir $c_3 = -3c_1$ ein. Dann erhalten wir $2c_1 + c_2 - 3c_1 = -c_1 + c_2 = 0$ und somit $c_1 = c_2$.

(iii) Wir setzen $c_2 = c_1$ und $c_3 = -3c_1$ in den dritten Term $6c_1 - c_2 + 2c_3$ ein und erhalten $6c_1 - c_1 - 6c_1 = 0$.

Hieraus folgt dann $c_1 = 0$ und somit $c_3 = -3(0) = 0$ und $c_2 = -(0) = 0$. Die einzige Lösung des Gleichungssystems ist also $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Daher sind die drei Polynome linear unabhängig.

(c) Wir suchen nach Zahlen α_1, α_2 und α_3, so dass

$$q(X) = \alpha_1 p_1(X) + \alpha_2 p_2(X) + \alpha_3 p_3(X)$$

Wir setzen die Ausdrücke für $p_1(X), p_2(X)$ und $p_3(X)$ in die Gleichung ein.

$$\begin{aligned} X &= 3\alpha_1 X^2 + 2\alpha_1 X + 6\alpha_1 + \alpha_2 X - \alpha_2 + \alpha_3 X^2 + \alpha_3 X + 2\alpha_1 \\ &= (3\alpha_1 + \alpha_3)X^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X + (6\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) \end{aligned}$$

Nun vergleichen wir die Koeffizienten der gleichen Potenzen von X auf beiden Seiten der Gleichung. Auf der linken Seite haben wir nur X, also sind die Koeffizienten der X^2 und konstanten Terme gleich null, d.h:

(i) Der Koeffizient von X^2 ist $3\alpha_1 + \alpha_3 = 0$

(ii) Der Koeffizient von X ist $2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$

(iii) Der konstante Term ist $6\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$

Aus der ersten Gleichung folgt $\alpha_3 = -3\alpha_1$, was wir in die zweite Gleichung einsetzen:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_1 = 1, \quad \text{dann gilt } \alpha_2 = \alpha_1 + 1.$$

Setzen wir nun $\alpha_3 = -3\alpha_1$ und $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$ in die dritte Gleichung ein, erhalten wir

$$6\alpha_1 - (1 + \alpha_1) - 6\alpha_1 = 0\,,$$

mithin also $\alpha_1 = -1$. Deshalb ist $\alpha_2 = 1 - 1 = 0$ und $\alpha_3 = -3(-1) = 3$. Die Linearkombination von $p_1(X), p_2(X)$ und $p_3(X)$ lautet also

$$q(X) = -1 \cdot p_1(X) + 0 \cdot p_2(X) + 3p_3(X)$$

Aufgabe H 37. *Orthonormalsysteme*

Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: u_1, u_2 ist ein Orthonormalsystem.

(b) Konstruieren Sie den Vektor $u_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass $-u_1, u_2, u_3$ ein Rechtssystem ist.

(c) Sei $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Hesse Normalform der Ebene, welche die Punkte P, Q sowie die Gerade $\left\{P + \lambda u_3 \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ enthält.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\langle u_1|u_1\rangle &= \frac{1}{3}\cdot 3 = 1\\ \langle u_2|u_2\rangle &= \frac{1}{6}\cdot 6 = 1\\ \langle u_1|u_2\rangle &= \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Foglich ist u_1, u_2 ein Orthonormalsystem.

(b) Wir berechnen

$$u_3 := u_1 \times u_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt offenbar $|u_1 \times u_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1} = 1$, also ist $-u_1, u_2, u_1 \times u_2$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Wir wissen jedoch zunächst nicht, ob es sich auch um ein Rechtssystem handelt. Wir berechnen also

$$(u_1 \times u_2) \times -u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -u_2.$$

Es ist also $-u_1, u_1 \times u_2, u_2$ tatsächlich ein Rechtssystem und

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ist der gewünschte Vektor.

(c) Wir benötigen zwei Vektoren, die in der Ebene liegen:

(i) Der Vektor $PQ = Q - P = \left(\begin{smallmatrix}-2\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$

(ii) Der Richtungsvektor der Geraden $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$

Wir suchen den Normalenvektor η der Ebene: η ist orthogonal zu beiden Vektoren PQ und u_3:

$$n^* = PQ \times u_3 = \sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right).$$

mit $|n^*| = \sqrt{2}\,\sqrt{6}$ erhalten wir also den Normalenvektor $\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right) = u_2$. Für den Abstand berechnen wir

$$\langle P\,|\,\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Die Hesse Normalform ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}&\left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \middle| x\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\\ =&\left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\end{aligned}$$

Aufgabe H 38. *Vektorprodukt*

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Rechenregeln für beliebige Vektoren $u, v, w, \xi \in \mathbb{R}^3$ korrekt sind.

(a) $\langle v \,|\, w\rangle\, u - \langle v \,|\, u\rangle\, w = v \times (u \times w)$

(b) $-\langle v \,|\, w \times w\rangle = \langle v \times u \,|\, w\rangle - \langle v \,|\, u \times w\rangle$

(c) $v \times (u \times w) = u \times (w \times v)$

(d) $\langle v \times u \,|\, w \times \xi\rangle + \langle u \,|\, w\rangle \langle v \,|\, \xi\rangle = \langle v \,|\, w\rangle \langle u \,|\, \xi\rangle + \langle v \,|\, v \times \xi\rangle$

Lösungshinweise hierzu: Wir stellen u, v, w, ξ als $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ dar.

(a) Die Aussage ist korrekt:

$$\begin{aligned}
v \times (u \times w) &= (v_1, v_2, v_3) \times (u_2w_3 - u_3w_2, u_3w_1 - u_1w_3, u_1w_2 - u_2w_1) \\
&= (v_2(u_1w_2 - u_2w_1) - v_3(u_3w_1 - u_1w_3),\ v_3(u_2w_3 - u_3w_2) - v_1(u_1w_2 - u_2w_1), \\
&\quad\ v_1(u_3w_1 - u_1w_3) - v_2(u_2w_3 - u_3w_2)) \\
&\quad\ \text{nach } u_i, w_i \text{ sortieren :} \\
&= (u_1(v_2w_2 + v_3w_3) - w_1(v_2u_2 + v_3u_3), u_2(v_1w_1 + v_3w_3) - w_2(v_1u_1 + v_3u_3)\ , \\
&\quad\ u_3(v_1w_1 + v_2w_2) - w_3(v_1u_1 + v_2u_2))
\end{aligned}$$

Wir addieren $(0, 0, 0) = (u_1(v_1w_1) - w_1(v_1u_1), u_2(v_2w_2) - w_2(v_2u_2), u_3(v_3w_3) - w_3(v_3u_3))$ zur Gleichung und bekommen:

$$\begin{aligned}
v \times (u \times w) &= (u_1 \langle v \,|\, w\rangle - w_1 \langle v \,|\, u\rangle\, , u_2 \langle v \,|\, w\rangle - w_2 \langle v \,|\, u\rangle\, , u_3 \langle v \,|\, w\rangle - w_3 \langle v \,|\, u\rangle) \\
&= \langle v \,|\, w\rangle\, u - \langle v \,|\, u\rangle\, w.
\end{aligned}$$

(b) Die Aussage ist korrekt: Da $\langle v \,|\, w \times w\rangle = \langle v \,|\, 0\rangle = 0$ ist, bleibt nur noch

$$\langle v \times u \,|\, w\rangle = \langle v \,|\, u \times w\rangle$$

zu zeigen. Es ist:

$$\begin{aligned}
\langle v \,|\, u \times w\rangle &= \langle v \,|\, (u_2w_3 - u_3w_2, u_3w_1 - u_1w_3, u_1w_2 - u_2w_1)\rangle \\
&= v_1(u_2w_3 - u_3w_2) + v_2(u_3w_1 - u_1w_3) + v_3(u_1w_2 - u_2w_1) \\
&\quad\ \text{nach } w_i \text{ sortieren} \\
&= w_1(v_2u_3 - v_3u_2) + w_2(v_3u_1 - v_1u_3) + w_3(v_1u_2 - v_2u_1) \\
&= \langle v \times u \,|\, w\rangle\, .
\end{aligned}$$

(c) Die Aussage ist falsch, ein entsprechendes Gegenbeispiel ist durch $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben: Es gelten

$$v \times (u \times w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$u \times (w \times v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Die Aussage ist korrekt: Da $\langle v \,|\, v \times \xi \rangle = 0$ ist, bleibt zu zeigen, dass :

$$\langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle + \langle u \,|\, w \rangle \langle v \,|\, \xi \rangle = \langle v \,|\, w \rangle \langle u \,|\, \xi \rangle$$

In der zweiten Teilaufgabe haben wir ferner gezeigt, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle x \times y \,|\, z \rangle = \langle x \,|\, y \times z \rangle$$

gilt. Mit $x = v, y = u, z = (w \times \xi)$ folgt

$$\langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle = \langle v \,|\, u \times (w \times \xi) \rangle .$$

In der ersten Teilaufgabe haben wir gezeigt, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:

$$x \times (y \times z) = \langle x \,|\, z \rangle y - \langle x \,|\, y \rangle z$$

gilt. Mit $x = u, y = w, z = \xi$ fogt

$$u \times (w \times \xi) = \langle u \,|\, \xi \rangle w - \langle u \,|\, w \rangle \xi.$$

Zusammengefasst gilt also:

$$\begin{aligned} \langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle &= \langle v \,|\, u \times (w \times \xi) \rangle \\ &= \langle v \,|\, \langle u \,|\, \xi \rangle w - \langle u \,|\, w \rangle \xi \rangle \\ &= \langle v \,|\, w \rangle \langle u \,|\, \xi \rangle - \langle u \,|\, w \rangle \langle v \,|\, \xi \rangle . \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle + \langle u \,|\, w \rangle \langle v \,|\, \xi \rangle = \langle v \,|\, w \rangle \langle u \,|\, \xi \rangle .$$

Aufgabe H 39. *Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5\sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ für alle $n \geqq 1$.

(b) Bestimmen Sie B^8.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

IA $n = 1$: Es gilt:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^1 - 1) \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix} .$$

IH Es gelte $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ für ein $n \geqq 1$.

IS $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
A^{n+1} = A^n \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{IH}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 + 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^{n+1} - 1) \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

wegen $5 + 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) = 5 + \frac{5}{2} 3^{n+1} - \frac{15}{2} = \frac{5}{2} \cdot 3^{n+1} - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \left(3^{n+1} - 1\right)$.

Mit vollständiger Induktion folgt $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2}(3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ für alle $n \geqq 1$.

(b) Es gilt $B = \sqrt{3} A$ und somit $B^8 = \left(\sqrt{3} A\right)^8 = \left(\sqrt{3}\right)^8 A^8$. Mit (a) folgt also

$$B^8 = \left(\sqrt{3}\right)^8 \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2}(3^8 - 1) \\ 0 & 3^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & \frac{5}{2}\left(3^{12} - 81\right) \\ 0 & 3^{12} \end{pmatrix}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 40. *Geometrische Reihe*

Stellen Sie sich vor, Sie befinden sich in der Mitte eines offenen Feldes. Sie gehen 16 Meter nach vorne, drehen sich nach rechts und gehen 8 Meter, drehen sich wieder nach rechts und gehen weitere 4 Meter, und so weiter. Dies geht unendlich weiter. Wenn Sie schließlich unendlich viele Wendungen gemacht haben, wie weit sind Sie dann vom ursprünglichen Ausgangspunkt entfernt?

Hinweis: Betrachten Sie die Wege in einem kartesischen Koordinatensystem und trennen Sie zunächst nach horizontaler und vertikaler Laufrichtung.

Lösungshinweise hierzu: Wir starten im Ursprungspunkt $(0, 0)$ und führst eine Reihe von Bewegungen aus, wobei Sie bei jeder Wendung die Richtung um 90 Grad ändern und die zurückgelegte Strecke in jedem Schritt halbiert wird. Nun verfolgen wir, wie weit Sie sich in den x und y Richtungen bewegen:

Die Bewegungen in der y-Richtung sind: 16 Meter (nach Norden), -4 Meter (nach Süden), 1 Meter, -0.25 Meter und so weiter. Diese bilden eine geometrische Reihe mit dem ersten Term $a_1 = 16$ und dem Verhältnis $q = -\frac{1}{4}$. Die Summe dieser Reihe ist:

$$S_y = \sum_{j=0}^{\infty} 16 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^j = 16 \cdot \frac{1}{1 - \frac{-1}{4}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5}.$$

Die Bewegungen in der x-Richtung sind: 8 Meter (nach Osten), -2 Meter (nach Westen), $+0,5$ Meter, $-0,125$ und so weiter. Auch diese Bewegungen bilden eine geometrische Reihe mit dem ersten Term $a_1 = 8$ und dem Verhältnis $q = \frac{-1}{4}$. Die Summe dieser Reihe ist:

$$S_x = \sum_{j=0}^{\infty} 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^j = \frac{8}{1 - \frac{-1}{4}} = 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5}.$$

Der Abstand vom Ursprung $(0,0)$ zum Endpunkt (S_x, S_y) ist durch den Satz des Pythagoras:

$$\text{Enfernung} = \sqrt{(S_x)^2 + (S_y)^2)} = \sqrt{\frac{\left(2^6\right)^2 + \left(2^5\right)^2}{25}} = \sqrt{\frac{2^{10} \cdot (4+1)}{25}} = \frac{2^5}{\sqrt{5}} = \frac{32}{\sqrt{5}}$$

, die Entfernung zum Ausgangspunkt ist also $\frac{32}{\sqrt{5}}$ Meter.