Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. *Neujahrspartygerichte*

Für eine Neujahrsparty möchten Sie verschiedene Gerichte zubereiten, die hauptsächlich die folgenden Zutaten benötigen:

- Gericht 1 (35 Port.): 1 kg Hähnchen, 120 g Mehl, 150 g Butter
- Gericht 2 (25 Port.): 2 kg Rindfleisch, 250 g Mehl, 125 g Butter, 125 g frische Kräuter
- Gericht 3 (30 Port.): 2 kg Hähnchen, 100 g Mehl, 100 g Butter

Ihre Vorräte zum 1. Januar 2025 sind 10 kg Hähnchen, 250 g frische Kräuter, 1250 g Butter, 1350 g Mehl, sowie reichlich von allen übrigen Zutaten. Wieviele ganzzahlige Portionen jedes Gerichts können Sie damit maximal zubereiten, wenn Sie Ihre gesamten Hähnchen- und Mehlvorräte aufbrauchen wollen?
Hinweis: Stellen Sie zuerst mit den Informationen über die Hähnchen und das Mehl ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses. Eliminieren Sie anschließend alle nicht realisierbaren Lösungen.

Lösungshinweise hierzu: Im folgenden sei X die Anzahl der Gericht 1, Y die Anzahl der Gericht 2 und Z die Anzahl der Gericht 3. Da wir das Hänchen komplett verbrauchen wollen, ergibt sich aus den Rezepten die Gleichung

$$\frac{1}{35}X + 0Y + \frac{2}{30}Z = 10.$$

Genauso liefert der Bedarf an Mehl in den Rezepten die Gleichung

$$\frac{120}{35}X + \frac{250}{25}Y + \frac{100}{30}Z = 1350.$$

Die übrigen Zutaten wollen wir nicht exakt verbrauchen, aber wir können natürlich nicht mehr benutzen als wir tatsächlich haben. Damit ergeben sich folgende Ungleichungen:

- Butter: $\frac{150}{35}X + \frac{125}{25}Y + \frac{100}{30}Z \leqq 1250$
- frische Kräuter: $\frac{125}{25}Y \leqq 250$.

Wir ignorieren jetzt zuerst die Ungleichungen und basteln ein Gleichungssystem aus den Gleichungen. Dieses hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$[A\|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{35} & 0 & \frac{2}{30} & 10 \\ \frac{120}{35} & \frac{250}{25} & \frac{100}{30} & 1350 \end{array}\right].$$

Zur Lösung verwenden wir nun Gauß:

$$
\begin{aligned}
[A\|b] &= \left[\begin{array}{ccc||c} \frac{1}{35} & 0 & \frac{2}{30} & 10 \\ \frac{120}{35} & \frac{250}{25} & \frac{100}{30} & 1350 \end{array}\right] \\
Z_2 - Z_1 120: &\left[\begin{array}{ccc||c} \frac{1}{35} & 0 & \frac{2}{30} & 10 \\ 0 & \frac{250}{25} & -\frac{140}{30} & 150 \end{array}\right] \\
\begin{array}{r} 35Z_1: \\ Z_2\frac{1}{10}: \end{array} &\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & \frac{7}{3} & 350 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{15} & 15 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Alle Lösungen sind also gegeben durch

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{7}{15} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Da wir nur ganze Portionen und auch keine negative Anzahl an Portionen haben können, ergeben für uns nur folgende Lösungen Sinn:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -35 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \{0, \ldots, 10\}.$$

Jetzt betrachten wir noch die Ungleichungen. Wegen der frische Kräuter ergibt sich

$$250 \geqq \frac{125}{25} V = 5(15 + t7) = 75 + t35 \iff t \leqq \frac{175}{35} = 5.$$

Für die Butter ergibt sich

$$
\begin{aligned}
1250 &\geqq \frac{150}{35} X + \frac{125}{25} Y + \frac{100}{30} Z \\
&= \frac{150}{35}(350 - t35) + \frac{125}{25}(15 + t7) + \frac{100}{30} t15 \\
&= 1500 - 150t + 75 + 35t + 50t = 1575 - 65t,
\end{aligned}
$$

also

$$t \geqq \frac{3150 - 2500}{130} = 5.$$

Damit erhalten wir also $t = 5$. Insgesamt haben wir folglich 175 Portionen von Gericht 1, 50 von Gericht 2 und 75 von Gericht 3.

Aufgabe H 42. *Gauß -Algorithmus I*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Systems $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Lösungshinweise hierzu: Wendet man den Gauß-Algorithmus an, so erhält man die folgenden Zwischenschritte:

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1&-2&0&0&-4&-9\\ -2&5&-1&0&8&18\\ 0&4&-6&1&0&-3\\ 0&0&1&-2&-3&-3\\ 0&0&0&1&2&3\end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ Z_2+2\,Z_1: \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1&-2&0&0&-4&-9\\ 0&1&-1&0&0&0\\ 0&4&-6&1&0&-3\\ 0&0&1&-2&-3&-3\\ 0&0&0&1&2&3\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1+2\,Z_2: \\ \\ Z_3-4\,Z_2: \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1&0&-2&0&-4&-9\\ 0&1&-1&0&0&0\\ 0&0&-2&1&0&-3\\ 0&0&1&-2&-3&-3\\ 0&0&0&1&2&3\end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ \\ -\frac{1}{2}\cdot Z_3: \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1&0&-2&0&-4&-9\\ 0&1&-1&0&0&0\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\ 0&0&1&-2&-3&-3\\ 0&0&0&1&2&3\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1+2\,Z_3: \\ Z_2+\ Z_3: \\ \\ Z_4-\ Z_3: \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1&0&0&-1&-4&-6\\ 0&1&0&-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\ 0&0&0&-\frac{3}{2}&-3&-\frac{9}{2}\\ 0&0&0&1&2&3\end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ -\frac{2}{3}\cdot Z_4: \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1&0&0&-1&-4&-6\\ 0&1&0&-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\ 0&0&0&1&2&3\\ 0&0&0&1&2&3\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1+\ Z_4: \\ Z_2+\frac{1}{2}\,Z_4: \\ Z_3+\frac{1}{2}\,Z_4: \\ \\ Z_5-\ Z_4: \end{array}\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1&0&0&0&-2&-3\\ 0&1&0&0&1&3\\ 0&0&1&0&1&3\\ 0&0&0&1&2&3\\ 0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

Aus dem letzten Ergebnis kann man die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ ablesen (vgl. 4.7.6). Man erhält

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3\\ 3\\ 3\\ 3\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ -1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H 43. *Gauß -Algorithmus II*

Gibt es $\beta \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ \beta+1 & \beta+2 & 3+2\beta\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) genau eine Lösung **(b)** keine Lösung **(c)** mehrere Lösungen

besitzt? Geben Sie bei positiver Antwort auf (a) oder (c) ferner die Lösungsmenge(n) an.

Lösungshinweise hierzu:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 2 & \beta \\ \beta+1 & \beta+2 & 2\beta+3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_1: \\ Z_2-(\beta+1)Z_1: \\ Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 2 & \beta \\ 0 & -\beta & 1 & -(\beta+1)\beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\begin{array}{r} Z_1-2Z_3: \\ Z_3: \\ Z_2+\beta Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta+1 & -(\beta+1)\beta \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_1: \\ Z_2-Z_3/(\beta+1): \\ Z_3/(\beta+1): \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \end{array}\right]$$

Die letzte Umformung ist nur für $\beta \neq -1$ nötig und möglich.
Somit

(a) gibt es für $\beta \neq -1$ die eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$.

(b) ist für $\beta = -1$ die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) gibt es kein $\beta \in \mathbb{R}$, für welches das das LGS keine Lösung besitzt.

Aufgabe H 44. *Lineare Abbildung*

Gegeben sei die Basis $B: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die Standardbasis $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$. Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \; f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \; f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren von E unter der Abbildung f.

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrizen ${}_E f_E$ und ${}_E f_B$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man erkennt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also (da f linear ist)

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) - 2f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Spalten der Matrizen ${}_E f_E$ bzw. ${}_E f_B$ sind gegeben durch die Bilder der Basisvektoren von E bzw. B dargestellt in der Basis E. Aus (a) folgt also

$$ {}_E f_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} $$

und

$$ {}_E f_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 4 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} $$

Frischhaltebox

Aufgabe H 45. *Skalarprodukt*

Seien u, v zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Rechnen Sie nach:

(a) $\langle u \,|\, v \rangle = \frac{1}{4}|u+v|^2 - \frac{1}{4}|u-v|^2$.

(b) Gilt $\langle u \,|\, u \rangle = \langle v \,|\, v \rangle$, so sind $u+v$ orthogonal zu $u-v$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt:

$$ \begin{aligned} \frac{1}{4}|u+v|^2 - \frac{1}{4}|u-v|^2 &= \frac{1}{4}\langle u+v \,|\, u+v \rangle - \frac{1}{4}\langle u-v \,|\, u-v \rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle u \,|\, u+v \rangle + \frac{1}{4}\langle v \,|\, u+v \rangle - \left(\frac{1}{4}\langle u \,|\, u-v \rangle - \frac{1}{4}\langle v \,|\, u-v \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4}\langle u \,|\, u \rangle + \frac{1}{4}\langle u \,|\, v \rangle + \frac{1}{4}\langle v \,|\, u \rangle + \frac{1}{4}\langle v \,|\, v \rangle \\ &\qquad - \frac{1}{4}\langle u \,|\, u \rangle + \frac{1}{4}\langle u \,|\, v \rangle + \frac{1}{4}\langle v \,|\, u \rangle - \frac{1}{4}\langle v \,|\, v \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle u \,|\, v \rangle + \frac{1}{2}\langle v \,|\, u \rangle = \langle u \,|\, v \rangle \end{aligned} $$

wegen $\langle u \,|\, v \rangle = \langle v \,|\, u \rangle$ in $\mathbb{R}^n$.

(b) Es gilt:

$$ \begin{aligned} \langle u+v \,|\, u-v \rangle &= \langle u \,|\, u-v \rangle + \langle v \,|\, u-v \rangle \\ &= \langle u \,|\, u \rangle \underbrace{- \langle u \,|\, v \rangle + \langle v \,|\, u \rangle}_{=0 \text{ in } \mathbb{R}^n} - \langle v \,|\, v \rangle \\ &= \langle u \,|\, u \rangle - \langle v \,|\, v \rangle = 0 \end{aligned} $$