Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 46. *Linearität*

Entscheiden Sie jeweils, welche der nachfolgenden Abbildungen $\mathbb{K}$-linear sind.

(a) $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c-a \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \mathrm{i}\bar{z}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(c) $\gamma : \mathrm{Pol}_n \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p'(0) + 2p(1)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\varphi : \mathrm{Pol}_n \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p(0) - 2$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu:

Wir prüfen alle Abbildungen $\vartheta : V \to W$ auf Additivität – d.h. $\vartheta(v+w) = \vartheta(v) + \vartheta(w)$ für alle $v, w \in V$ – sowie Homogenität - -also $\vartheta(kv) = k\vartheta(v)$ für alle $v \in V, k \in \mathbb{K}$. (Dies kann auch in einem Schritt gemacht werden, d. h. man zeigt $\vartheta(v + kw) = \vartheta(v) + k\vartheta(w)$ für alle $k \in \mathbb{K}, v, w \in V$).

(a) Sei $v := (a_1, b_1, c_1)^\intercal, w := (a_2, b_2, c_2)^\intercal$ für $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha(v+w) &= \alpha((a_1, b_1, c_1)^\intercal + (a_2, b_2, c_2)^\intercal) \\ &= \alpha((a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)^\intercal) \\ &= (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, b_1 + b_2 + c_1 + c_2, c_1 + c_2 - a_1 - a_2)^\intercal \\ &= (a_1 + b_1, b_1 + c_1, c_1 - a_1)^\intercal + (a_2 + b_2, b_1 + c_2, c_2 - a_2)^\intercal \\ &= \alpha((a_1, b_1, c_1)^\intercal) + \alpha((a_2, b_2, c_2)^\intercal) = \alpha(v) + \alpha(w). \end{aligned}$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} \alpha(kv) = \alpha(k(a_1, b_1, c_1)^\intercal) &= \alpha((ka_1, kb_1, kc_1)^\intercal) \\ &= (ka_1 + kb_1, kb_1 + kc_1, kc_1 - ka_1)^\intercal \\ &= k(a_1 + b_1, b_1 + c_1, c_1 - a_1)^\intercal \\ &= k\alpha((a_1, b_1, c_1)^\intercal) = k\alpha(v). \end{aligned}$$

Somit ist α $\mathbb{R}$-linear.

(b) Sei $v := z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\beta(\mathrm{i}(a + \mathrm{i}b)) = \beta(-b + \mathrm{i}a)) = i(-b - \mathrm{i}a) = a - b\mathrm{i}$$

aber $\mathrm{i}\beta(a+\mathrm{i}b) = \mathrm{i}^2(a-\mathrm{i}b) = -a+b\mathrm{i}$. Somit ist $\mathrm{i}\beta(v) \neq \beta(\mathrm{i}v)$ für $v \neq 0$, die Abbildung also nicht $\mathbb{C}$-linear.

(c) Seien $p, q \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$. Laut Vorlesung ist formales Ableiten von Polynomen linear. Des Weiteren gilt gemäß Definition für das Einsetzen von Werten in Polynome $(p + q)(r) = p(r) + q(r)$ sowie $(kp)(r) = kp(r)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \gamma(p + kq) &= (p + kq)'(0) + 2(p + kq)(1) = (p' + kq')(0) + 2p(1) + 2kq(1) \\ &= p'(0) + kq'(0) + 2p(1) + 2kq(1) = p'(0) + 2p(1) + kq'(0) + 2kq(1) \\ &= p'(0) + 2p(1) + k(q'(0) + 2q(1)) = \gamma(p) + k\gamma(q). \end{aligned}$$

Somit ist die Abbildung γ $\mathbb{R}$-linear.

(d) Wir wählen $p \in \operatorname{Pol}_n\mathbb{R}$ mit $p(X) = 1$. Dan gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ einerseits

$$2\varphi(p) = 2(p(0) - 2) = 2(1 - 2) = -2\,,$$

aber andererseits $\varphi(2p) = (2p)(0) - 2 = 2 - 2 = 0 \neq -2$. Somit ist die Abbildung φ nicht $\mathbb{R}$-linear.

Aufgabe H 47. *Links und Rechtsinverse*

Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sowie ferner eine Links- oder Rechtsinverse der Matrizen, falls diese existieren.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir wissen, dass nicht-quadratische Matrizen mit vollem Rang unendlich viele Rechts oder Linksinverse haben (aber nicht beide auf einmal). Wir für die Bestimmung einer Rechtsinversen die selben Schritte wie zur Rangbestimmung durchführen müssen (zumindest anfangs), fangen wir gleich mit letzterem an. (Sollte keine Rechtsinverse existieren, würde dies früher oder später auf eine unlösbare Zeile führen.):

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}Z_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-\frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+\frac{3}{2}Z_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{3}Z_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Wir sehen, die Matrix hat Rang 3, wir fahren mit der Bestimmung einer Rechtsinversen – deren Existenz nun garantiert ist – fort.

$$\xrightarrow{Z_1-Z_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 0 & \frac{53}{15} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-3Z_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{62}{15} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{15} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Wir können die rechte Seite zu einer Rechtsinversen von A erweitern:

$$A_r := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wir erhalten alle weiteren Inversen, indem wir zusätzlich die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ bestimmen. Diese ist durch

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{31}{15} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{15} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Menge aller Rechtsinversen ist nun gegeben durch:

$$\left\{ A_r + \begin{pmatrix} -\frac{31}{15} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{15} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Für B bestimmen wir den Rang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -3 & -10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2-2Z_1, Z_4+3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -10 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-Z_2, Z_4+2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen hier bereits dass der Rang 2 ist (wir könnten auch noch die 2. Zeile mit $\frac{1}{5}$ normieren, um die Standardform zu erhalten). Damit hat die Matrix keine Inverse, da Sie weder vollen Zeilen- noch vollen Spaltenrang hat.

(c) Wir bestimmen den Rang von C direkt in der erweiterten Form:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-5Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{13}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -13 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+13Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-\frac{9}{13}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{52} & \frac{5}{52} & -\frac{9}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1-2Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{7}{52} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{52} & \frac{5}{52} & -\frac{9}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{52} & \frac{11}{52} & \frac{1}{52} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{52} & \frac{5}{52} & -\frac{9}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Somit hat C vollen Rang, die Inverse ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{52} & \frac{11}{52} & \frac{1}{52} \\ \frac{11}{52} & \frac{5}{52} & -\frac{9}{52} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(d) Die 1. und 3. Zeile von D sind linear unabhängig (da keine vielfachen von einander), die Matrix hat also Rang 2. Wir bestimmen nun die Inverses dieser Teilmatrix und erweitern dieses zu einem Linksinversen von D:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Um eine Linksinverse zu erhalten, füllen wir nun die fehlenden Spalten mit Nullen auf:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 48. *Invertierbarkeit, Kern, Bild*

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 7 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha - 4 \\ 1 & \alpha & 2\alpha + 6 & -\alpha + 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = -1$ das Inverse von A.

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = -2$ jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon x \mapsto Ax$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bestimmen direkt die Inverse von A und müssen lediglich jene α ausschliessen, bei welchen wir durch 0 teilen bzw. das 0-fache einer Zeile addieren würden.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha - 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 2\alpha + 6 & -\alpha + 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 - 4Z_1, Z_3 - 2Z_1, Z_4 - Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & \alpha & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 2\alpha + 4 & 4 - \alpha & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 - 2Z_2, Z_4 + (\alpha - 1)Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 & 4 - \alpha & -4\alpha + 3 & \alpha - 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 + (\alpha + 5)Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha + 2)^2 & 33 + 2\alpha & -11 - \alpha & 5 + \alpha & 1 \end{array}\right)$$

Die Nullstellen von $(\alpha+2)^2$ sind $\alpha = -2$. Somit hat A genau für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ vollen Rang, und ist genau dann invertierbar.

(b) Für $\alpha = -1$ fahren wir mit dem Gauss-Algorithmus fort:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+Z_4, Z_1+2Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 63 & -20 & 8 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 37 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-Z_3, Z_1+2Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 137 & -44 & 18 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -41 & 13 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 37 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 96 & -31 & 13 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -41 & 13 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 37 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-Z_2, -Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 96 & -31 & 13 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 41 & -13 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -37 & 12 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Somit ist das Inverse von A für $\alpha = -1$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 96 & -31 & 13 & 3 \\ 41 & -13 & 5 & 1 \\ -37 & 12 & -5 & -1 \\ 31 & -10 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Für $\alpha = -2$ ist der Kern von A gleich dem Kern von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

was durch Zeilenausräumen zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

umgeformt werden kann. Der Kern dieser Matrix ist durch $\langle (4, 2, -2, 1)^\intercal \rangle$ gegeben.

Da die ersten 3 Spalten von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 7 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, und nach Dimensionformel **(4.8.17)** das Bild Dimension $4-1=3$ hat, ist eine Basis des Bildes durch $(1,4,2,1)^\intercal, (1,3,0,-2)^\intercal, (2,7,1,4)^\intercal$ gegeben.

Aufgabe H 49. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Komposition*

Gegeben seien die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \\ 2x-y \end{pmatrix}$ sowie die Basen $B\colon b_1 := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), b_2 := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^2$ und $C\colon c_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), c_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), c_3 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^3$.
Ferner seien E_2 und E_3 die jeweiligen Standardbasen.
Bestimmen Sie ${}_{E_3}\alpha_{E_2}$, ${}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B$, ${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3}$ und ${}_C\alpha_B$.

Lösungshinweise hierzu: Die ersten beiden Matrizen lassen sich direkt aus der Aufgabenstellung ablesen:

$${}_{E_3}\alpha_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, {}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Für die dritte Matrix müssen wir die Einheitsvektoren in E_3 als Linearkombinationen der Basisvektoren von C schreiben:

$$\begin{aligned} (1,0,0)^\intercal &= \frac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3), \\ (0,1,0)^\intercal &= \frac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3), \\ (0,0,1)^\intercal &= \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3) \end{aligned}$$

Demnach ist die Matrix gegeben durch

$${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die letzte gesuchte Matrix ergibt sich als Produkt

$$\begin{aligned} {}_C\alpha_B &= {}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3\,E_3}\alpha_{E_2\,E_2}(\mathrm{id}_2)_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 50. *Kreuzprodukt*

Es seien $v := \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $v \times w$ in Abhängigkeit von α.

Wie muss α gewählt werden, damit $\sin \sphericalangle(v, w) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ gilt?

Lösungshinweise hierzu: Das Kreuzprodukt ist gegeben durch

$$v \times w = \begin{pmatrix} \alpha \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \\ -((-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot 1) \\ (-1) \cdot 2 - \alpha \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 2 \\ -2 \\ -2 - \alpha \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$(\sin \sphericalangle(v, w))^2 = \left(\frac{|v \times w|}{|v||w|} \right)^2 = \frac{2\alpha^2 + 12}{6\alpha^2 + 12} = \frac{\alpha^2 + 6}{3\alpha^2 + 6}$$

Die Gleichung $\frac{\alpha^2+6}{3\alpha^2+6} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$ nach α auflösen ergibt $\alpha^2 = 2$ und somit $\alpha \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.