R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

11. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 51. *Determinante und Rang*

Wir betrachten die Abbildungen $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & t \\ t & 4 & 4 & 4 \\ 4 & t & 4 & 4 \\ 4 & 4 & t & 4 \end{pmatrix}$,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \det(A(x))$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N} : x \mapsto \mathrm{Rg}(A(x))$.

(a) Ist die Abbildung f linear?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0$?

(c) Bestimmen Sie das Bild $\big\{g(x) \bigm| x \in \mathbb{R}\big\}$ von g.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen zunächst $\det(A(x))$: Indem wir von jeder Zeile ab der zweiten die erste abziehen (elementare Zeilenoperationen), überführen wir die Matrix $A(x)$ in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & x \\ x-4 & 0 & 0 & 4-x \\ 0 & x-4 & 0 & 4-x \\ 0 & 0 & x-4 & 4-x \end{pmatrix}$$

welche nach 4.12.1 die selbe Determinante hat. Durch Addieren der ersten drei Spalten zur letzten erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12+x \\ x-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-4 & 0 \end{pmatrix} =: B(x)$$

wobei nach 4.12.1 und 4.12.2 ebenfalls die Determinante nicht verändert wird. Wir erhalten letztendlich mit dem Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} \det(A(x)) = \det(B(x)) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12+x \\ x-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+4} \cdot (12+x) \cdot \det \begin{pmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ 0 & x-4 & 0 \\ 0 & 0 & x-4 \end{pmatrix} \\ &= -(x+12)(x-4)^3 \end{aligned}$$

(a) Für eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gilt aufgrund der Homogenität stets $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. (Hierbei ist $\mathbf{0}$ der jeweilige Nullvektor, $0 \in \mathbb{K}$ ein Skalar.) Wegen $f(0) = -12 \cdot (-4)^3 = 3 \cdot 256 = 768$ kann f nicht linear sein.

(b) $f(x) = 0$ gilt nur für $x = 4$ und $x = -12$.

(c) Für $x \notin \{-12, 4\}$ ist $\det(A(x)) \neq 0$, die Matrix $A(x)$ ist also regulär und hat somit Rang 4. Für die anderen beiden Fälle nutzen wir, dass neben der Determinante auch der Rang unter den verwendeten Zeilen- und Spaltenoperationen erhalten bleibt und setzen direkt in $B(x)$ ein:

- $x = -12$: Die Matrix

$$B(-12) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

  hat Rang 3, wie man anhand der Nullspalte und der der linearen Unabhängigkeit der letzten drei Zeilen abliest.

- $x = 4$: Die Matrix

$$B(4) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  hat offensichtlich Rang 1.

Wir erhalten:

$$\{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{1, 3, 4\}$$

Aufgabe H 52. *Entwicklungssatz*

Seien $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(2AB)$, ohne den Gauß-Algorithmus zu verwenden.

Lösungshinweise hierzu:

A: Wir entwickeln zunächst nach der 4. Zeile, anschließend nach der 1. Spalte und nutzen danach Sarrus:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{4+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} \\
&= -2 \cdot \left((-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \right) \\
&= -6 \cdot ((-16 + 240 + 84 - 112) - 2\,(120 + 42 - 48)) \\
&= -6 \cdot (196 - 228) = 6 \cdot 32 = 192
\end{aligned}$$

B: Für B nutzen wir die Blocksdreiecksgestalt:

$$\begin{aligned}\det(B) = \det\begin{pmatrix}3&1&0&0&0\\2&3&0&0&0\\2&3&1&2&3\\2&1&2&1&3\\2&2&3&2&1\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}3&1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}\\ &= 7\cdot(1+18+12-9-6-4) = 84\end{aligned}$$

Wir erhalten aus 4.12.1 (mZ) und 4.12.3

$$\begin{aligned}\det(2AB) &= 2^5\cdot\det(A)\cdot(B) = 2^5\cdot 3\cdot\underbrace{64}_{=2^6}\cdot(3\cdot 7\cdot 2^2) = \underbrace{1024}_{=2^{10}}\cdot\underbrace{(8\cdot 63)}_{504}\\ &= 504000+10080+2016 = 516096\,.\end{aligned}$$

Aufgabe H 53. *Volumenberechnung*

Gegeben seien die Matrix A und die Vektoren v_1, v_2 und v_3 durch

$$A = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&1\\3&0&-2\end{pmatrix},\quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen V_1 des von v_1, v_2 und v_3 aufgespannten Spats.

(b) Berechnen Sie das Volumen V_2 des von Av_1, Av_2 und Av_3 aufgespannten Spats.

(c) Berechnen Sie die Determinante von A.

(d) Sei α die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon x\mapsto Ax$. Wie hängen die Determinante von A und die Änderung des orientierten Volumens eines Spats unter der Abbildung α zusammen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei V die Matrix mit den Spalten v_1, v_2 und v_3 (in dieser Reihenfolge). Das Volumen berechnet sich als

$$\begin{aligned}V_1 = |\det(V)| &= \left|\det\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right|\\ &= |0+0-4-0-1-0| = 5\end{aligned}$$

(b)+(c) Wir berechnen zunächst

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&1\\3&0&-2\end{pmatrix} = 2+8+9+8 = 27$$

Hieraus erhalten wir

$$V_2 = |\det(Av_1, Av_2, Av_3)| = |\det(AV)| = |\det(A)|\cdot|\det(V)| = 5\cdot 27 = 135$$

(d) Die Determinante der Matrix A ist der Faktor, um den sich das orientierte Volumen des aufgespannten Spats unter der Abbildung α ändert. (Der Betrag der Determinante gibt entsprechend den Änderungsfaktor des Volumens an.)

Aufgabe H 54. *Determinanten*

Gegeben sei $x \in \mathbb{R}^+$ sowie die Matrix $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ mit Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie:

(a) $\det(A_t)$, $\det({A_t}^6)$ und $\det(\sqrt{x}\,A_t)$. **(b)** Alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t invertierbar ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$\det(A_t)$: Zur Berechnung nutzen wir die Blockdiagonalgestalt: Nach 4.12.4 gilt:

$$\begin{aligned} \det(A_t) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} t & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \\ &= -3 \cdot (t - 42) \cdot (120 - 121) = 3t - 126 \end{aligned}$$

$\det({A_t}^6)$: Wir erhalten aus 4.12.3 (1)

$$\det({A_t}^6) = (\det(A_t))^6 = (3t - 126)^6$$

$\det(\sqrt{x}\,A_t)$: Wir erhalten aus 4.12.1 (VZ)

$$\det(\sqrt{x}\,A_t) = \sqrt{x}^6\,(\det(A_t)) = x^3(3t - 126)$$

(b) A_t ist genau dann invertierbar, wenn

$$0 \neq \det(A_t) \overset{\text{(a)}}{=} 3(t - 42)$$

also ist A_t nur für $t \in \mathbb{R} \setminus \{42\}$ invertierbar.

Frischhaltebox

Aufgabe H 55. *Märchenzahlen*
Zeigen Sie induktiv: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $k = k(n) \in \mathbb{N}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k$.

Lösungshinweise hierzu:

IA Sei $n = 1$. Es gilt:

$$10^{2\cdot 1+1} + 1 = 1001 = 990 + 11 = 90 \cdot 11 + 11 = 91 \cdot 11$$

folglich gilt die Aussage für $n = 1$ mit $k = k(1) = 91$.

IH Für $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k$.

IS $n \to n + 1$

$$\begin{aligned} 10^{2(n+1)+1} + 1 &= 100 \cdot 10^{2n+1} + 1 = 99 \cdot 10^{2n+1} + \left(10^{2n+1} + 1\right) \\ &\overset{\text{IH}}{=} 9 \cdot 10^{2n+1} \cdot 11 + k(n) \cdot 11 = 11 \cdot \left(9 \cdot 10^{2n+1} + k(n)\right) \end{aligned}$$

Da 9, 10^{2n+1} und $k(n)$ natürliche Zahlen sind, trifft dies auch auf

$$k := 9 \cdot 10^{2n+1} + k(n)$$

zu.

Nach vollständiger Induktion folgt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k = k(n) \in \mathbb{N}$ mit

$$10^{2n+1} + 1 = 11k\,.$$