Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 56. *Koordinatentransformation*
Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ affine Koordinatensysteme. Sei ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ für das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$, sowie

$$
\begin{array}{llll}
{}_{\mathbb{E}}P = (\,1\;\;0\;\;-1\,)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{E}}Q = (\,-3\;\;4\;\;-2\,)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{E}}R = (\,-7\;\;2\;\;-1\,)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{E}}S = (\,-5\;\;4\;\;-1\,)^{\intercal} \\
{}_{\mathbb{G}}P = (\,0\;\;0\;\;0\,)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{G}}Q = (\,1\;\;0\;\;1\,)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{G}}R = (\,2\;\;0\;\;0\,)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{G}}S = (\,1\;\;-1\;\;1\,)^{\intercal}.
\end{array}
$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen zu allererst ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ gemäß 5.7.6: Dazu wenden wir zunächst Gauß auf ${}_{\mathbb{F}}\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ an, um $F = {}_{\mathbb{E}}\mathrm{id}_{\mathbb{F}}$ zu bestimmen:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r} Z_1 + 2Z_3 : \\ Z_2 - 3Z_1 : \\ \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
Z_2 - 6Z_3 : \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

Sei Q der Ursprung von $\mathbb{F}$. Dann folgt aus ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(0) = F^{-1}(-Q)$ insbesondere

$$
Q = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

Nun berechnen wir ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ aus den angegebenen Koordinaten der Punkte P, Q, R und S. Dazu machen wir den Ansatz

$$
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = Gv + t \qquad \text{mit} \quad G \in \mathbb{R}^{3\times 3},\; t \in \mathbb{R}^3.
$$

Die Bedingung ${}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}P)$ liefert sofort $t = {}_{\mathbb{E}}P = (\,1\;\;0\;\;-1\,)^{\intercal}$. Somit bleibt noch G zu bestimmen. Bezeichnen wir mit g_1, g_2, g_3 die unbekannten Spalten von G so, dass $G = (\,g_1\;\;g_2\;\;g_3\,)$, dann kann die Bedingung ${}_{\mathbb{E}}R = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}R)$ geschrieben werden als

$$
{}_{\mathbb{E}}R = (\,g_1\;\;g_2\;\;g_3\,)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \iff {}_{\mathbb{E}}R = 2g_1 + t \iff g_1 = \frac{1}{2}({}_{\mathbb{E}}R - t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Somit ist g_1 bestimmt. Die Bedingung ${}_{\mathbb{E}}Q = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}Q)$ liefert weiter

$$ {}_{\mathbb{E}}Q = (\, g_1 \;\; g_2 \;\; g_3 \,) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \quad \Longleftrightarrow \quad {}_{\mathbb{E}}Q = g_1 + g_3 + t \quad \Longleftrightarrow \quad g_3 = {}_{\mathbb{E}}Q - g_1 - t = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, $$

womit die dritte Spalte g_3 von G bestimmt ist. Weiter ergibt ${}_{\mathbb{E}}S = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}S)$ schließlich

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}S = (\, g_1 \;\; g_2 \;\; g_3 \,) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \quad &\Longleftrightarrow \quad {}_{\mathbb{E}}S = g_1 - g_2 + g_3 + t \\ &\Longleftrightarrow \quad g_2 = -{}_{\mathbb{E}}S + g_1 + g_3 + t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

Damit ist auch die zweite Spalte g_2 von G bestimmt und wir erhalten

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} $$

.

(a) Wir erhalten aus ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Fv + Q$

$$ \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right). $$

Analog erhalten wir

$$ \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right). $$

(b) Wir bestimmen zunächst die Inverse von G:

$$ \left[\begin{array}{ccc||ccc} -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] $$

$$ \begin{array}{r} Z_2 : \\ -Z_3 : \\ Z_1 + 4Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] $$

$$ \begin{array}{r} Z_1 + 3/5Z_2 - 3/10Z_3 : \\ 3Z_2 - Z_3 : \\ 1/10Z_3 - 1/5Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & -3/10 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & -9 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 & 2/5 & 1/5 \end{array} \right] $$

$$ \begin{array}{r} \\ Z_2 + 9Z_3 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & -3/10 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & -2/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 & 2/5 & 1/5 \end{array} \right] $$

Also ist

$$G^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -4 & -12 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= G^{-1}(v-P) \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -4 & -12 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} v + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ferner ist nach 5.7.8 – man beachte die vertauschten Rollen von $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ sowie P und Q –

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= \left({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}\right)(v) \\ &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(Gv+P) = F^{-1}\left(Gv+P-Q\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -11 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe H 57. *Gram-Schmidt für Polynomräume*

Wir betrachten den Raum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich 2, versehen mit der Basis $B\colon\ b_1, b_2, b_3$ mit $b_1(X) = 1$, $b_2(X) = X - 1$ und $b_3(X) = X^2$. Ferner definieren wir ein Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_H$ und eine Norm $\|\cdot\|_H$ für stetig diffenzierbare Funktionen $f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mittels

$$\langle f \mid g \rangle_H := \int_{-1}^{1} f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad\qquad \|f\|_H := \sqrt{\langle f \mid f \rangle_H}$$

(a) Gewinnen Sie aus B eine Orthonormalbasis $U\colon\ u_1, u_2, u_3$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit: $\mathrm{L}(u_1) = \operatorname{Pol}_0 \mathbb{R}$ und $\mathrm{L}(u_1, u_2) = \operatorname{Pol}_1 \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie ${}_B\mathrm{id}_U$ und ${}_U\mathrm{id}_B$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir stellen zuerst fest, dass $\mathrm{Pol}_0\,\mathbb{R} = \mathrm{L}\,(b_1)$ und $\mathrm{Pol}_1\,\mathbb{R} = \mathrm{L}\,(b_1, b_2)$ gelten. Folglich müssen wir nur Gram-Schmidt anwenden:

$$\|b_1\|_H^2 = \int_{-1}^{1} (b_1(x))^2 + (b_1'(x))^2 \,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} 1^2 + 0^2 \,\mathrm{d}\,x = 2$$

$$\Rightarrow u_1(X) := \frac{b_1(X)}{\|b_1\|_H} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{u}_2 := b_2 - \langle b_2 \,|\, u_1 \rangle_H \, u_1 = b_2 - \int_{-1}^{1} \underbrace{(b_2(x)u_1(x))}_{=(x-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} + \underbrace{(b_2'(x)u_1'(x))}_{=1\cdot 0} \,\mathrm{d}\,x \cdot u_1$$

$$= b_2 - \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right]_{-1}^{1} u_1$$

$$= b_2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) u_1 = b_2 + \sqrt{2}u_1$$

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_2\|_H^2 = \int_{-1}^{1} (x-1+1)(x-1+1) + (1-0+0)(1-0+0) \,\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 + 1 \,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow u_2(X) = \frac{\tilde{u}_2(X)}{\|\tilde{u}_2\|_H} = \sqrt{\frac{3}{8}}\left(b_2 + \sqrt{2}u_1\right)(X) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}X$$

$$\tilde{u}_3 := b_3 - \langle b_3 \,|\, u_1 \rangle_H \, u_1 - \langle b_3 \,|\, u_2 \rangle_H \, u_2$$

$$= b_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 + 0 \,\mathrm{d}\,x \cdot u_1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x + 2x \cdot 1 \,\mathrm{d}\,x \cdot u_2$$

$$= b_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} u_1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_{-1}^{1} u_2$$

$$= b_3 - \frac{\sqrt{2}}{3}u_1$$

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_3\|_H^2 = \langle \tilde{u}_3 \,|\, \tilde{u}_3 \rangle_H = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 + (2x)^2 \,\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} + 4x^3 \,\mathrm{d}\,x$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x + \frac{4}{3}x^2\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{18-10+8\cdot 15}{45} = \frac{128}{45} \\
\Rightarrow u_3(X) &= \frac{\tilde{u}_3(X)}{\|\tilde{u}_3\|_H} = \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \cdot \left(X^2 - \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Um zu überprüfen, ob man richtig gerechnet haben, lässt sich neben einen erneuten Nachrechnen häufig auch ein Probe in umgekehrter Richtung machen. Für diese Aufgabe sähe eine solche wie folgt aus:

- Mit $u_1 \in \operatorname{Pol}_0 \mathbb{R}$, $u_2 \in \operatorname{Pol}_1 \mathbb{R} \setminus \operatorname{Pol}_0(\mathbb{R})$ und $u_3 \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \setminus \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ (ersteres hat Grad 0, zweiteres Grad 1, letzteres Grad 2) ist die Bedingung $\operatorname{Pol}_0 \mathbb{R} = \operatorname{L}(u_1)$, $\operatorname{Pol}_1 \mathbb{R} = \operatorname{L}(u_1, u_2)$ und $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} = \operatorname{L}(u_1, u_2, u_3)$ erfüllt.
- Wir überprüfen nun Orthogonalität und Normierung:

$$
\begin{aligned}
\|u_1\|_H^2 &= \langle u_1 \,|\, u_1 \rangle_H = \int_{-1}^{1} (u_1(x))^2 + (u_1'(x))^2 \,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} + 0 \,\mathrm{d}\,x = 1 \\
\|u_2\|_H^2 &= \langle u_2 \,|\, u_2 \rangle_H = \int_{-1}^{1} \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{8} \,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \\
\|u_3\|_H^2 &= \langle u_3 \,|\, u_3 \rangle_H = \frac{45}{128}\int_{-1}^{1} \underbrace{x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}}_{=\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2} + \underbrace{4x^2}_{=2x^2} \,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{9}{128}x^5 - \frac{5}{64}x^3 + \frac{5}{128}x + \frac{15}{32}x^3\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{9}{128} - \frac{5}{64} + \frac{5}{128} + \frac{15}{32}\right) - \left(-\frac{9}{128} + \frac{5}{64} - \frac{5}{128} - \frac{15}{32}\right) \\
&= \frac{18-20+10+120}{128} = 1 \\
\langle u_1 \,|\, u_2 \rangle_H &= \int_{-1}^{1} u_1(x)u_2(x) + u_1'(x)u_2'(x) \,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{4}x + 0 \,\mathrm{d}\,x = 0 \\
\langle u_1 \,|\, u_3 \rangle_H &= \frac{3\sqrt{5}}{16}\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + 0 \,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{5}}{16}\left[x^3 - x\right]_{-1}^{1} = 0 \\
\langle u_2 \,|\, u_3 \rangle_H &= \frac{3\sqrt{15}}{64}\int_{-1}^{1} (x^3 - x) + 2x \,\mathrm{d}\,x = 0
\end{aligned}
$$

  wobei $\langle u_1 \,|\, u_2 \rangle_H$ und $\langle u_3 \,|\, u_2 \rangle_H$ aus Symmetriegründen folgen (Integration einer ungeraden Funktion über ein Intervall der Form $[-a, a]$). Somit bilden u_1, u_2 und u_3 tatsächlich eine Orthonormalbasis.

(b) Aus dem Algorithmus lesen wir ab:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1 \qquad \Rightarrow {}_B(u_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ {}_U(b_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} b_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{u_1}_{=\frac{1}{\sqrt{2}} b_1} \qquad \Rightarrow {}_B(u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \ {}_U(b_2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} b_3 - \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} b_1 \qquad \Rightarrow {}_B(u_3) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ {}_U(b_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten entsprechend:

$${}_B\operatorname{id}_U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und

$${}_U\operatorname{id}_B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 58. *Spiegelung*

Eine Spiegelung an einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$. Ist $\alpha \circ \alpha$ eine eigentliche / uneigentliche Isometrie?

(b) Sei E die Ebene durch die Punkte $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Bildebene $E' := \alpha(E) = \big\{\alpha(x) \,\big|\, x \in E\big\}$ von E unter α in Hesse-Normalform.

(c) Seien $r_1 := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$ und $r_2 := \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$. Für welche $j \in \{1,2\}$ ist die Abbildung $\beta_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + r_j$ eine Ebenenspiegelung? Geben Sie in diesen Fällen die Spiegelebene in Hesse-Normalform an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt mit $A = A^\intercal$

$$A^2 = A^\intercal A = \mathrm{E}_3$$

also ist $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}$ und somit eine eigentliche Isometrie $\big(\det(\mathrm{E}_n) = 1\big)$.

(b) Zur Bestimmung der Spiegelebene betrachten wir die Fixpunktgleichung $Av = v$. Dies führt auf das homogene LGS $(A - E_3)v = 0$. Wir erhalten

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} (-3)\cdot Z_1 : \\ Z_2 + 2Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

womit der Lösungsraum

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

ist. Der Lösungsraum beschreibt somit die gesuchte Spiegelebene Ebene S, welche den Ursprung $(0,0,0)$ enthält und die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}^\intercal$ und $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\intercal$ hat. Wir berechnen den Normalenvektor n mittels

$$n = \frac{1}{|\hat{n}|}\hat{n}, \quad \text{wobei} \quad \hat{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\hat{n}| = \sqrt{6}.$$

Somit ist $n = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}^\intercal$. Da $(0,0,0)$ ein Punkt der Ebene ist, erhalten wir nach Bemerkung 2.9.7.1 zwei mögliche Darstellung für die Hesse-Normalform:

$$S\colon\ \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad S\colon\ -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = 0.$$

(c) Die Matrix A ist uneigentlich orthogonal, da $A^\intercal A = E_3$ und

$$\det A = \frac{1}{27}(-4-4-4+1-8-8) = -1$$

nach der Regel von Sarrus (3.11.5) gilt. Insbesondere gilt $A^{-1} = A^\intercal = A$ weil A orthogonal und symmetrisch ist. Somit ist $(A^{-1})^2 = A^2$ und daher $\alpha\circ\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A^2 v$. Zudem ist mit Lemma 3.10.5

$$(A^2)^\intercal(A^2) = (AA)^\intercal(AA) = A^\intercal \underbrace{A^\intercal A}_{=E_3} A = A^\intercal A = E_3$$

und wegen 3.12.3.1 gilt $\det(A^2) = \det(A)^2 = 1$. Damit ist A^2 eine eigentlich orthogonale Matrix und $\alpha\circ\alpha$ ist eine eigentliche Isometrie und keine uneigentliche Isometrie.

(d) Damit β_j eine Spiegelung ist, muss der Translationsanteil r_j orthogonal zu der Spiegelebene aus **(a)** sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn r_j ein Vielfaches des Normalenvektors n aus **(a)** ist. Wir erkennen sofort, dass $r_1 \neq tn$ für alle $t\in\mathbb{R}$ und $r_2 = -2\sqrt{6}\,n$. Somit ist nur β_2 eine Ebenenspiegelung. Dies kann jeweils auch rechnerisch durch Lösen eines inhomogenen LGS gesehen werden.
Für r_1 führt die Fixpunktgleichung $\beta_1(v) = v \ \Leftrightarrow\ (A-E_3)v = -r_1$ auf das LGS

$$\left[\begin{array}{ccc||c} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2\\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2\end{array}\right] \quad\rightsquigarrow\quad \begin{array}{r}(-3)\cdot Z_1:\\ Z_2+2Z_1:\\ Z_3-Z_1:\end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -2 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Die 2. Zeile liefert einen Widerspruch. Somit kann es keine Lösung geben und β_1 ist keine Spiegelung.
Für r_2 führt die Fixpunktgleichung $\beta_2(v) = v \ \Leftrightarrow\ (A-E_3)v = -r_2$ auf das LGS

$$\left[\begin{array}{ccc||c} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2\\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -4\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2\end{array}\right] \quad\rightsquigarrow\quad \begin{array}{r}(-3)\cdot Z_1:\\ Z_2+2Z_1:\\ Z_3-Z_1:\end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -2 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Der Lösungsraum ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s,\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

und beschreibt damit eine Spiegelebene T, welche den Punkt $(-6, 0, 0)$ enthält und dieselben Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$ wie S aus Teilaufgabe **(a)** hat. Damit ist n aus **(a)** auch ein Normalenvektor von T und die Hesse-Normalform von T ist gegeben durch

$$T\colon\ -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = \sqrt{6}.$$

Der Translationsanteil r_2 führt somit erneut zu einer Spiegelung mit einer Spiegelebene T, welche als die um $\sqrt{6}$ Längeneinheiten verschobene Spiegelebene S identifiziert werden kann.

Aufgabe H 59. *Spiegelung*

Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$-3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.$$

Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Ebene beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$.

Lösungshinweise hierzu:

Um die Spiegelung an der Ebene zu beschreiben, bilden wir zu jedem Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ den Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^\intercal$. Der Vektor $n = (-3, 3, 1)^\intercal$ steht orthogonal auf der Ebene (Satz 2.9.5), folglich ist die folgende Gerade orthogonal zur Ebene und geht durch den Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$.

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um den Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene zu erhalten setzen wir die Punkte von h in die Ebenengleichung ein:

$$-3\tilde{x}_1 + 9t + 3\tilde{x}_2 + 9t + \tilde{x}_3 + t = 0,$$

daher liegt der Schnittpunkt mit der Ebene bei

$$t_0 = \frac{3\tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3}{19}.$$

Der Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ liegt also bei

$$2t_0 = \frac{6\tilde{x}_1 - 6\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3}{19},$$

und ist durch die folgenden Koordinaten gegeben:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \tilde{x}_1 + 2t_0(-3) = \frac{1}{19}\left(\tilde{x}_1 + 18\tilde{x}_2 + 6\tilde{x}_3\right),\\ \hat{x}_2 &= \tilde{x}_2 + 2t_0(3) = \frac{1}{19}\left(18\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 6\tilde{x}_3\right),\\ \hat{x}_3 &= \tilde{x}_3 + 2t_0 = \frac{1}{19}\left(6\tilde{x}_1 - 6\tilde{x}_2 + 17\tilde{x}_3\right).\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix}1 & 18 & -6\\ 18 & 1 & 6\\ -6 & 6 & 17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix}.$$

Matrix A und Vektor t sind durch

$$A = \frac{1}{19}\begin{pmatrix}1 & 18 & 6\\ 18 & 1 & -6\\ 6 & -6 & 17\end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

gegeben.

Alternativer Lösungsweg:

Die Spiegelebene $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\right\}$ ist die Fixpunktmenge der Ebenenspiegelung, das heißt

$$\tilde{x} = A\tilde{x} + t$$

für alle $\tilde{x} \in S$. Da die Spiegelebene den Nullvektor enthält, folgt hieraus insbesondere $t = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Die Ursprungsgerade $G := \left\{\lambda\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ ist ferner orthogonal zur Spiegelebene. Dies bedeutet insbesondere dass für den Schnittpunkt P mit der Spiegelebene S – welcher in diesem Falle der Ursprung ist – sowie für alle $\hat{x} \in G$ gilt:

$$\begin{aligned}A\hat{x} + t &= A(\hat{x} - P + P) + t = A(\hat{x} - P) + \underbrace{AP + t}_{=P}\\ &= A(\hat{x} - P) = P - \hat{x}\end{aligned}$$

Der Vektor von P nach $\hat{x}$ – welcher Orthogonal zur Spiegelebene ist – ändert durch die Spiegelung lediglich seine Orientierung. Setzen wir $b_1 := \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}$, so erhalten wir wegen $\hat{x} \in G = \mathrm{L}\left(b_1\right)$ folglich

$$\lambda A b_1 = -\lambda b_1$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir wählen nun einen zu b_1 orthogonalen, normierten Vektor, beispielsweise $b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Dieses Orthogonalsystem ergänzen wir nun mit 3.9.3.5 zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$:

$$b_3 := b_1 \times b_2 = \frac{1}{\sqrt{38}}\left(\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\end{pmatrix}$$

Sowohl b_2 als auch b_3 sind in der Spiegelebene enthalten, erfüllen also

$$\begin{aligned} b_2 &= Ab_2 \\ b_3 &= Ab_3 \end{aligned}$$

Somit hat die Spiegelung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$ bezüglich der Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ die Darstellungsmatrix

$$_B\varphi_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist nun $\mathcal{E}\colon \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, so ist die Basiswechselmatrix $_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_B$ gegeben durch

$$_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_B = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & \sqrt{19} & -1 \\ 3\sqrt{2} & \sqrt{19} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

die Inverse – da auch $\mathcal{E}$ eine ONB ist – hingegen durch

$$_B\mathrm{id}_{\mathcal{E}} = \left(_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_B\right)^{\intercal} = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{19} & \sqrt{19} & 0 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= {_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_B}\,{_B\varphi_B}\,{_B\mathrm{id}_{\mathcal{E}}} \\ &= \frac{1}{38} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & \sqrt{19} & -1 \\ 3\sqrt{2} & \sqrt{19} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{19} & \sqrt{19} & 0 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{19} & -1 \\ -3\sqrt{2} & \sqrt{19} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{19} & \sqrt{19} & 0 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 2 & 36 & 12 \\ 36 & 2 & -12 \\ 12 & -12 & 34 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 18 & 1 & -6 \\ 6 & -6 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 60. *Nullstellen von Polynomen*

Schreiben Sie die folgenden Polynome als Produkte von Linearfaktoren:

(a) $p(X) = X^2 + \mathrm{i}\,X + 6$ **(b)** $q(X) = X^3 + X - 10$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir nutzen zur Bestimmung der Nullstellen x_1 und x_2 die Mitternachtsformel (vgl. Zusatzmaterial) und erhalten :

$$x_{1/2} = \frac{-\mathrm{i} \pm \sqrt{\mathrm{i}^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-\mathrm{i} \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{-\mathrm{i} \pm 5\mathrm{i}}{2}$$

Entsprechend ist

$$p(X) = (X + 3\mathrm{i})(X - 2\mathrm{i})$$

(b) Die erste Nullstelle finden wir durch geschicktes Raten: $q(2) = 0$. Wir spalten den Entsprechenden Linearfaktor mittels Polynomdivision ab:

$$\begin{array}{l}
(X^3 + 0X^2 + X - 10) : (X-2) = X^2 + 2X + 5 \\
\underline{-(X^3 - 2X^2)} \\
\quad 2X^2 + X \\
\quad \underline{-(2X^2 - 4X)} \\
\qquad 5X - 10 \\
\qquad \underline{-(5X - 10)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Anwendung der Mitternachtsformel liefert

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4\mathrm{i}}{2}$$

und somit

$$q(X) = (X - 2)(X + 1 - 2\mathrm{i})(X + 1 + 2\mathrm{i})$$