Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 61. *Eigenwerte*

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexe Matrix.

(a) Sei λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass λ^k ein Eigenwert von A^k für $k \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Sei A eine Matrix mit der Eigenschaft $A^m = 0$ für $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A ist.

(c) Sei $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass A nicht invertierbar ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir erhalten mit vollständiger Induktion:

IA $k = 1$: $A^1 v = \lambda^1 v \quad \Leftrightarrow \quad Av = \lambda v$.

IH Für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $A^k v = \lambda^k v$.

IS $k \to k+1$:

$$A^{k+1}v = A\left(A^k v\right) \overset{\text{IH}}{=} A\left(\lambda^k v\right) = \lambda^k\left(Av\right) = \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v.$$

(b) Wenn wir einen anderen EW $\lambda \neq 0$ von A hätten, dann wäre $\lambda^m \neq 0$ ein EW der Matrix A^m (siehe Teil **(a)**). Wir wissen aber, dass die Nullmatrix nur den Eigenwert 0 hat. Deshalb kann es keinen EW $\lambda \neq 0$ von A geben.

(c) Sei $\lambda = 0$ ein EW der Matrix A. Dann ist das Produkt der EW auch gleich 0. Dieses Produkt ist aber gleich $\det(A)$. Deshalb ist A nicht invertierbar.

Aufgabe H 62. *Parameterabhängige Matrix*

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte der Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 1 \\ -1 & t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen das charakteristische Polynom durch Entwicklung nach der letzten Zeile und erhalten

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \det\left(A_t - \lambda E_4\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -t & 0 & 1 \\ -1 & t-\lambda & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & t \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$= (-1)^{4+4} \cdot (1-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -t & 0 \\ -1 & t-\lambda & t \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Nochmal entwickeln nach der untersten Zeile liefert

$$\begin{aligned}\chi_{A_t}(\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -t \\ -1 & t-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)^2((1-\lambda)(t-\lambda)-t) \\ &= (1-\lambda)^2\lambda(\lambda-(1+t)).\end{aligned}$$

Es sind also drei interessante Fälle zu unterscheiden:

- Ist $t = 0$, so gibt es die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischen Vielfachheiten $e_{\lambda_1} = 1$ und $e_{\lambda_2} = 3$. Wegen $1 \leqq d_{\lambda_1} \leqq e_{\lambda_1} = 1$ (siehe Lemma 5.3.4 im Skript) folgt $d_{\lambda_1} = 1$. Für d_{λ_2} berechnen wir den Rang der Matrix $(A_0 - \mathrm{E}_4)$. Es ist

$$\mathrm{Rg}\,(A_0 - \mathrm{E}_4) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

  und daher $d_{\lambda_2} = 4 - 2 = 2$.

- Ist $t = -1$, so gibt es die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischen Vielfachheiten $e_{\lambda_1} = 2$ und $e_{\lambda_2} = 2$. Für d_{λ_1} berechnen wir den Rang der Matrix A_{-1}. Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}\,(A_{-1}) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\end{aligned}$$

  und daher $d_{\lambda_1} = 4-3 = 1$. Für d_{λ_2} berechnen wir den Rang der Matrix $\mathrm{Rg}\,(A_{-1} - \mathrm{E}_4)$. Es ist

$$\mathrm{Rg}\,(A_{-1} - \mathrm{E}_4) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

  und daher $d_{\lambda_2} = 4 - 3 = 1$.

- Ist $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ so gibt es die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1 + t$ mit algebraischen Vielfachheiten $e_{\lambda_1} = 1$, $e_{\lambda_2} = 2$ und $e_{\lambda_3} = 1$. Wie im ersten Fall folgen $d_{\lambda_1} = 1$ und $d_{\lambda_3} = 1$. Für d_{λ_2} berechnen wir den Rang der Matrix $\mathrm{Rg}\,(A_t - \mathrm{E}_4)$. Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}\,(A_t - \mathrm{E}_4) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 & 1 \\ -1 & t-1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ -1 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\end{aligned}$$

und daher $d_{\lambda_2} = 4 - 3 = 1$.

Aufgabe H 63. *Koordinatensysteme*

Wir verwenden das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^3$ und betrachten die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(a) Überprüfen Sie, ob $\mathbb{F} = (P; \overrightarrow{PQ_1}, \overrightarrow{PQ_2}, \overrightarrow{PQ_3})$ ein affines Koordinatensystem ist.

(b) Berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(c) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung mit ${}_{\mathbb{E}}(\alpha(x)) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Bestimmen Sie die Matrix B und den Vektor v so, dass ${}_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) = B \cdot {}_{\mathbb{F}}x + v$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\overrightarrow{PQ_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{PQ_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{PQ_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir müssen nun prüfen, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x - z &= 0, \\ y - z &= 0. \end{aligned}$$

Das gibt $x = y = z$ und $2x = 0$, also ist $x = y = z = 0$ und die drei Vektoren sind linear unabhängig.

(b) Weil $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem ist, haben wir

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ müssen wir $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}$ berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

also ist

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Dann ist ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = w$ dann und nur dann, wenn

$$v = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(w) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} w + \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix},$$

also ist

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1} \left(v - \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} v - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}0\\ -2\\ -1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten deswegen

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}0\\ -2\\ -1\end{pmatrix}.$$

(c) Wir haben

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}\alpha(x) &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}\alpha(x)) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}\alpha(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ferner gilt ${}_{\mathbb{E}}x = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also ist

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}\alpha(x) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten folglich $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H 64. *Diagonalisierung und Matrixpotenzen*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

(c) Geben Sie eine invertierbare Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist und bestimmen Sie $(S^{-1}AS)^4$ sowie A^4.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Allgemein gilt $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathrm{E}_n)$ für jede $n \times n$ Matrix M, also

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = -(\lambda - 1)(\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i})\,.$$

(b) Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch $1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}$. Wir berechnen die Eigenräume. Für $\lambda = 1$ erhalten wir:

$$A - \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} Z_3 : \\ -Z_1 : \\ Z_2 : \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow Z_2 - Z_1 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Eigenraum zum EW 1 ist also

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Für die Eigenräume zu $-\mathrm{i}$ und i genügt es, einen Eigenvektor v zu $-\mathrm{i}$ zu berechnen, ein entsprechender Eigenvektor zu i ist dann durch $\bar{v}$ gegeben. Es gilt

$$A + \mathrm{i}\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 & -1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} Z_3 : \\ 1/2(1-\mathrm{i})Z_2 : \\ \mathrm{i}Z_1 + Z_3 : \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hieraus erhalten wir die Eigenräume

$$V(-\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad V(\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Aus der letzten Teilaufgabe erhalten wir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $(S^{-1}AS)^4 = \mathrm{E}_3$ und $A^4 = S(S^{-1}A^4S)S^{-1} = S(S^{-1}AS)^4S^{-1} = S\mathrm{E}_3S^{-1} = \mathrm{E}_3$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 65. *Komplexe Zahlen und Summe*

Es seien $z_1 = \frac{\mathrm{i}}{3}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

Bestimmen Sie: **(a)** $\sum_{k=0}^{5} z_1^k$. **(b)** $\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\sqrt{k}}{z_2^2 + 2k} - \frac{\sqrt{k+1}}{2 + z_2^2 + 2k} \right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Allgemein gilt:

$$(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k - z^{k+1} = 1 - z^{n+1},$$

daher

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Wir erhalten:

$$\sum_{k=0}^{5} z_1^k = \frac{1 - z_1^6}{1 - z_1} = \frac{3^{-6}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3^6 - \mathrm{i}^6}{3 - \mathrm{i}} = \frac{1}{3^5} \cdot \frac{\overbrace{3^6 + 1}^{=729+1}}{3 - \mathrm{i}}$$
$$= \frac{1}{3^5} \cdot \frac{3 \cdot 730 + 730\mathrm{i}}{10} = \frac{73}{81} + \frac{73}{243}\mathrm{i}$$

(b) Teleskopsumme:

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\sqrt{k}}{z_2^2 + 2k} - \frac{\sqrt{k+1}}{z_2^2 + 2k + 2} \right) = \frac{\sqrt{1}}{z_2^2 + 2} - \frac{\sqrt{3+1}}{z_2^2 + 2(3+1)}$$
$$= \frac{1}{2 - 2\mathrm{i}} - \frac{2}{8 - 2\mathrm{i}} = \frac{2 + 2\mathrm{i}}{8} + \frac{4 + \mathrm{i}}{17}$$
$$= \frac{17 + 17\mathrm{i}}{68} - \frac{16 + 4\mathrm{i}}{68} = \frac{1}{68} + \frac{13}{68}\mathrm{i}$$