R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

14. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 66. *Grobeinteilung von Quadriken*

Geben Sie zu den folgenden Quadriken jeweils die erweiterte Matrix an und bestimmen Sie ihren Typ (kegelige Quadrik, Mittelpunktsquadrik oder parabolische Quadrik):

(a) $Q_\alpha := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0\right\}$,

(b) $Q_\beta := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 + 2 = 0\right\}$,

(c) $Q_\gamma := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 + 1 = 0\right\}$,

(d) $Q_\delta := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x_1^2 + 12x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 6x_3 + 1 = 0\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei $\operatorname{Rg} A = 2$ gilt. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

erhalten wir wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = 3.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine Mittelpunktsquadrik.

(b) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

erhalten wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 3.$$

Damit ist wegen $\operatorname{Rg} A = 1$ die gegebene Quadrik eine parabolische Quadrik.

(c) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Rg} A = 1$ schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhalten wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine kegelige Quadrik.

(d) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Rg} A = 3$ (wegen $\det A = -40$) schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

erhalten wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = 3.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine kegelige Quadrik.

Aufgabe H 67. *Eigenwerte, Definitheit*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von α.

(c) Für welche Werte des Parameters α ist $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A?

(d) Ist die quadratische Form $q_{A_3} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^\intercal A_3 x$ positiv definit, negativ definit oder indefinit? Geben Sie (in den letzten beiden Fällen) einen Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ an mit $q_{A_3}(y) < 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Eigenwerte von Matrix A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ \alpha & -\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda(2-\lambda) - 3\alpha. \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3\alpha\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1+3\alpha},\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{1+3\alpha}.$$

(b) Für $\alpha \neq -\frac{1}{3}$ ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und die algebraische und damit einhergehend die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte gleich 1.

Für $\alpha = -\frac{1}{3}$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Die algebraische Vielfachheit ist also 2. Der Eigenraum ist gleich dem Lösungsraum des homogenen LGS

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{array}\right).$$

Wir addieren $\frac{1}{3}$ mal die erste Zeile zur zweiten Zeile $(Z_2 + \frac{1}{3}Z_1)$:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Eigenraum ist also gleich

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Die geometrische Vielfachheit ist in diesem Fall also 1.

(c) v ist ein Eigenvektor von der Matrix A, wenn gilt:

$$Av = \lambda v.$$

Weil

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3\alpha \end{pmatrix}$$

ist, ist $\lambda = 3$ der einzige mögliche Eigenwert. 3α ist also gleich 3. Somit ist v ein Eigenvektor von der Matrix A genau für $\alpha = 1$.

(d) Die Eigenwerte von A_3 sind gleich $1 + \sqrt{10} > 0$ und $1 - \sqrt{10} < 0$. Die Quadrik ist also indefinit. Für $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt

$$q_{A_3}(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^{\intercal}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4.$$

Aufgabe H 68. *Hauptachsentransformation*
Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{2}\,x_1 + 2\sqrt{2}\,x_3 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dem Q euklidische Normalform besitzt und geben Sie die zugehörige euklidische Normalform an.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst formulieren wir die Quadrikgleichung in Matrixschreibweise $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad c = 0.$$

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A. Es ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(4-\lambda) + 2 + 2 - 4(4-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) + 4 + 4\lambda - 16 - 2 + 2\lambda \\ &= -10 - 3\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 \\ &= (-1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 5.$$

Wir bestimmen die zugehörigen Eigenräume:

- $V(-1)$: Es ist

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{Z3-Z1;\,Z1-2\cdot Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{Z2+\frac{5}{9}Z1;\,-\frac{1}{9}\cdot Z1;\,Z2\leftrightarrow Z1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $V(2)$: Es ist

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{Z1+Z2;\,Z3-2\cdot Z2;\,Z2\leftrightarrow Z1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{Z2+Z3;\,Z1-\frac{2}{3}\cdot Z2,\,\frac{1}{3}\cdot Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $V(5)$: Es ist

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{Z1+4\cdot Z2;\, Z3-2\cdot Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrr||r} 0 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{Z3+Z1;\, -\frac{1}{3}Z1;\, Z1\leftrightarrow Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{Z1+Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist $V(5) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren ist damit zum Beispiel gegeben durch

$$B\colon \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun $x = Ty$ mit $T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, so lautet die Quadrikgleichung bezüglich y

$$\begin{aligned} & -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 + 2\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}y_2 + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}y_3 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -y_1^2 + 2\left(y_2^2 + 2\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{8}{3}\right) - 2\cdot\frac{8}{3} + 5\left(y_3^2 + 2\cdot\frac{2}{5\sqrt{3}}y_3 + \frac{4}{75}\right) - 5\cdot\frac{4}{75} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -y_1^2 + 2\left(y_2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 + 5\left(y_3 + \frac{2}{5\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{28}{5} = 0. \end{aligned}$$

Mit $z = y + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{5\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ gilt dann

$$-z_1^2 + 2z_2^2 + 5z_3^2 - \frac{28}{5} = 0,$$

woraus sich die euklidische Normalform

$$\frac{5}{28}z_1^2 - \frac{5}{14}z_2^2 - \frac{25}{28}z_3^2 + 1 = 0$$

ergibt. Da $x = Ty = T\left(z - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{5\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right) = Tz - \frac{\sqrt{2}}{15}\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$, ist das zugehörige kartesische Koordinatensystem gegeben durch

$$\mathbb{F} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{15}\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe H 69. *Euklidische Normalform*
Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_3 + 1 = 0\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung dieser Quadrikgleichung an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrixbeschreibung von Q ist:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\} \text{ mit}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad c = 1.$$

(b) Zuerst diagonalisieren wir A. Hierzu bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenräume von A.

$$\chi_A = \det(A - \lambda E_3) = (-1-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Die Eigenwerte sind $-1, 2, 4$, jeweils mit algebraischer und somit auch geometrischer Vielfachheit 1. Berechnung der zugehörigen Eigenräume ergibt:

$$(A + E_3)x = 0: \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]. \to \quad \begin{array}{r} \\ \\ 4Z_3 + Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$(A - 2E_3)x = 0: \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]. \to \quad \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$(A - 4E_3)x = 0: \quad \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]. \to \quad \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Normieren wir die erhaltenen Eigenvektoren, um die folgende Orthonormalbasis zu bekommen: $f_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Entsprechend gilt für $F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$:

$$\tilde{A} = F^\intercal A F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a} = F^\intercal a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im Koordinatensystem $\mathbb{F} = (0; f_1, f_2, f_3)$ hat die Quadrik Q die Gleichung

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y^\intercal \tilde{A} y + 2\tilde{a}^\intercal y + c = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid -y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_2 + 1 = 0\}.$$

Nun verschieben wir gegen die linearen Terme:

$$\begin{aligned} 0 &= -y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_2 + 1 = \\ &= -y_1^2 + 2(y_2^2 + 2y_2 + 1 - 1) + 4y_3^2 + 1 \\ &= -y_1^2 + 2(y_2 + 1)^2 + 4y_3^2 - 1 \\ z_1 &:= y_1, z_2 := y_2 - (-1), z_3 := y_3 \\ &= -z_1^2 + 2z_2^2 + 4z_3^2 - 1 \end{aligned}$$

Der neue Ursprung P hat also die $\mathbb{F}$-Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, seine Standardkoordinaten erhält man als ${}_{\mathbb{E}}P = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

In dem Koordinatensystem $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ hat ist Quadrik Q durch die Gleichung $z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_3^2 + 1 = 0$ gegeben. Das ist ein einschaliges Hyperboloid.

Frischhaltebox

Aufgabe H 70. *Hessesche Normalform*

Sei E die Ebene durch die Punkte $P_1 = (0, 0, 3)$, $P_2 = (0, 3, 0)$, $P_3 = (1, 1, 0)$.
Berechnen Sie die Hessesche Normalform von E.

Lösungshinweise hierzu: Die Ebene kann beschrieben werden als

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Vektor $n = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ steht orthogonal auf E (er ist das Vektorprodukt der Richtungsvektoren; ein orthogonaler Vektor kann aber auch durch das Lösen eines LGS bestimmt werden). Wir erhalten somit durch Normierung

$$\eta = -\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die Hessesche Normalform von E lautet wegen $\langle P_1 \,|\, \eta \rangle = -\frac{3}{\sqrt{6}}$ folglich

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$