Tobias Holicki
Julia Meißner

Höhere Mathematik 1

1. Vortragsübung zur Vorlesung

M. Stroppel

Wintersemester 2023/2024

Die Aufgaben zur Vortragsübung werden besprochen am Mittwoch, den 25. Oktober, um
08:00 Uhr in V47.02 (bewe, geod, lrt, mach, verk)
17:30 Uhr in V47.01 (ernen, fmt, medtech, mawi, tema, uwt, verf, bau, iui)

Aufgabe V 1. *Vollständige Induktion*

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(b) Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$ eine Folge von Zahlen mit der Eigenschaft

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqq 3.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt $a_{3k+1} = (-1)^k a_1$ für alle $k \geqq 0$.

(c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\mathrm{e}^x - 5)^2$. Zeigen Sie, dass die n-te Ableitung von f gegeben ist durch

$$f^{(n)}(x) = 2^n \mathrm{e}^{2x} - 10\mathrm{e}^x \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es gelte $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für dieses $n \in \mathbb{N}$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 \overset{\text{IH}}{=} (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{4(n+1)^3 + n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2\left[4n+4+n^2\right]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) IA Wir zeigen die Aussage für $k = 0$: Es gilt

$$a_{3\cdot 0+1} = a_1 = 1 \cdot a_1 = (-1)^0 a_1.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, d.h., es gelte $a_{3k+1} = (-1)^k a_1$ für dieses $k \in \mathbb{N}_0$.

IS Wir zeigen die Aussage für $k+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für k: Es gilt

$$\begin{aligned} a_{3(k+1)+1} = a_{3k+4} = a_{3k+3} - a_{3k+2} = a_{3k+2} - a_{3k+1} - a_{3k+2} \\ = -a_{3k+1} \overset{\text{IH}}{=} -(-1)^k a_1 = (-1)^{k+1} a_1. \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $k \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

(c) IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Es gilt

$$f'(x) = 2(\mathrm{e}^x - 5)\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^x - 10\mathrm{e}^x = 2^1\mathrm{e}^{2x} - 10\mathrm{e}^x.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es gelte $f^{(n)}(x) = 2^n\mathrm{e}^{2x} - 10\mathrm{e}^x$ für dieses $n \in \mathbb{N}$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n: Es gilt

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \overset{\text{IH}}{=} \frac{d}{dx}(2^n\mathrm{e}^{2x} - 10\mathrm{e}^x) = 2^{n+1}\mathrm{e}^{2x} - 10\mathrm{e}^x.$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe V 2. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie jeweils für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Ungleichungen definiert und erfüllt sind.

(a) $x^2 - 1 \geqq 2x + 7$.

(b) $\dfrac{7}{x+2} + 4 > \dfrac{15}{x-2}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Ungleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, da es sich auch beiden Seiten um Polynome handelt. Weiter ist die Ungleichung äquivalent zu

$$0 \leqq x^2 - 1 - (2x+7) = x^2 - 2x - 8.$$

Die rechte Seite hat die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}, \quad \text{also} \quad x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 4.$$

Es gilt also $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$ und unsere Ungleichung äquivalent zu

$$0 \leqq (x+2)(x-4). \tag{1}$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- 1. Fall $x \leqq -2$: In diesem Fall gilt $x+2 \leqq 0$ und $x-4 \leqq -6 \leqq 0$. Damit erfüllt x die Ungleichung (1), denn das Produkt zweier nicht-positiver Zahlen ist nicht-negativ.
- 2. Fall $x > -2$ und $x < 4$: In diesem Fall gilt $x+2 > 0$ und $x-4 < 0$. Damit ist (1) nicht erfüllt, denn das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl ist negativ.
- 3. Fall $x \geqq 4$: In diesem Fall gilt $x+2 \geqq 6 > 0$ und $x-4 \geqq 0$. Damit erfüllt x die Ungleichung (1), denn das Produkt einer positiven Zahl mit einer nicht-negativen Zahl ist nicht-negativ.

Insgesamt gilt **(a)** also für alle $x \in (-\infty, -2] \cup [4, \infty)$.

(b) Offenbar ist die Ungleichung nicht definiert für $x = 2$ und für $x = -2$ da wir in diesen Fällen durch 0 teilen würden. Wir bringen zuerst alles auf eine Seite und vereinfachen:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{7}{x+2} + 4 - \frac{15}{x-2} &= \frac{7(x-2) + 4(x+2)(x-2) - 15(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{7x - 14 + 4x^2 - 16 - 15x - 30}{(x+2)(x-2)} = \frac{4x^2 - 8x - 60}{(x+2)(x-2)} \\ &= 4\frac{x^2 - 2x - 15}{(x+2)(x-2)} = 4\frac{(x-5)(x+3)}{(x+2)(x-2)}. \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt kann man wieder Nullstellen des Polynoms $x^2 - 2x - 15$ suchen. Damit ist die Ungleichung **(b)** also äquivalent zu

$$0 < \frac{(x-5)(x+3)}{(x+2)(x-2)}. \tag{2}$$

Wir unterscheiden nun fünf Fälle:

- 1. Fall $x < -3$: In diesem Fall gilt $x-5 < 0$, $x+3 < 0$, $x+2 < 0$ und $x-2 < 0$. Insbesondere gilt auch $\frac{1}{x-2} < 0$ und $\frac{1}{x+2} < 0$. Da das Produkt von vier negativen Zahlen positiv ist, ist (2) erfüllt.
- 2. Fall $-3 \leqq x < -2$: In diesem Fall gilt $x-5 < 0$, $x+3 \geqq 0$, $x+2 < 0$ und $x-2 < 0$. In diesem Fall liegt also ein Produkt aus drei negativen Zahlen und einer nicht-negativen Zahl. Damit ist (2) nicht erfüllt.
- Die übrigen Fälle sind $-2 < x < 2$, $2 < x \leqq 5$ und $x > 5$. Dort argumentiert man genauso.

Insgesamt ist **(b)** erfüllt für alle $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2) \cup (5, \infty)$.

Aufgabe V 3. *Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen

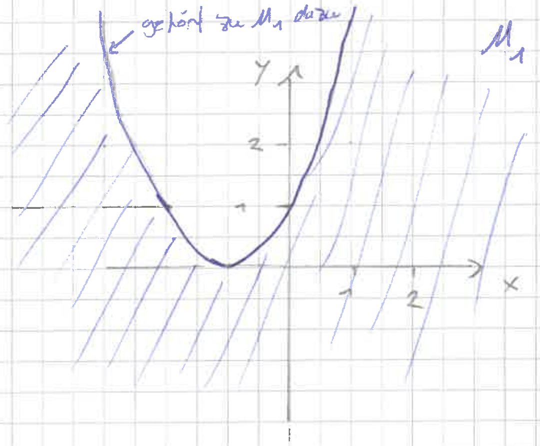
(a) $M_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \leqq (x+1)^2\right\}$

(b) $M_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < y^2\right\}$

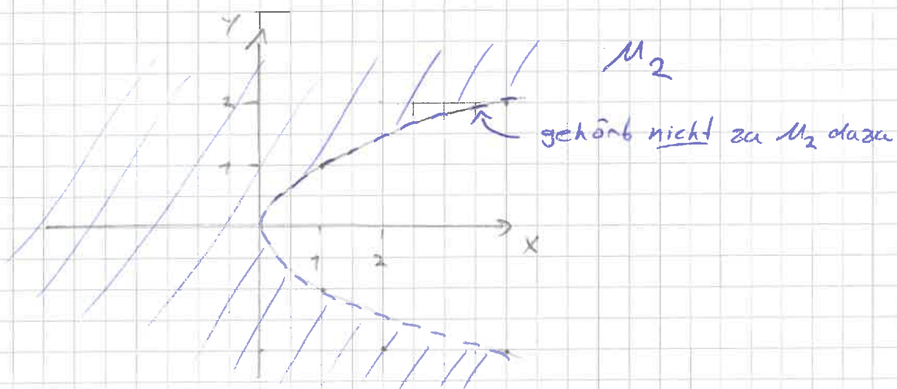
(c) $M_3 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+2)^2 + (y-1)^2 \leqq 3^2\right\}$

Lösungshinweise hierzu:

a)



b)



c)