Vortragsübung 2

Hilfreich

Aufgabe V4:

$$z_1 = \frac{3}{2} i + \frac{2-i}{(1+i)^2} =$$

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

Binom bei komplexen Zahlen

$$= \frac{3}{2} i + \frac{2-i}{2i}$$

$$= \frac{3}{2} i + \frac{(2-i)\cdot i}{(2i)\cdot i}$$

Brüche erweitern um „i" aus dem Nenner weg zu kriegen

$$= \frac{3}{2} i + \frac{2i - i^2}{2i^2}$$

$$= \frac{3}{2} i + \frac{2i+1}{-2} = \frac{3}{2} i - \frac{2}{2} i - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$\mathrm{Re}(z_1) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z_1) = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^9 = \frac{(2i)^9}{(1-i)^9} \Leftrightarrow$$

Hilfreich: Vielfache, weil $i^2 = -1$

$$(2i)^2 = 4i^2 = -4 \quad , \quad (2i)^4 = (-4)^2 = 16$$

$$(1-i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = 1^2 - 2i - 1 = -2i$$

$$(1-i)^4 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{16} \cdot 16 \cdot 2i}{\cancel{(-4)} \cdot \cancel{(-4)} \cdot (1-i)} = \frac{32i}{1-1i}$$

$$= \frac{32i \cdot (1+i)}{(1-i) \cdot (1+i)}$$

Die 3. binom Formel zum Erweitern

$$= \frac{32i + 32i}{1^2 - i^2} = \frac{32i - 32}{2}$$

$$= 16i - 16$$

$$\mathrm{Re}(z_2) = -16$$

$$\mathrm{Im}(z_2) = 16$$

$$z_3 = \frac{(1+i)(1-\sqrt{3}i)}{(1-i)^3} = $$

Binom Formeln verhalten sich toll

$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$$

$$(1-i)^3 = -2i(1-i) = -2i + 2i^2 = -2i - 2$$

$$= -2(i+1)$$

$$= \frac{\cancel{(1+i)}(1-\sqrt{3}i)}{-2\cancel{(i+1)}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\mathrm{Re}(z_3) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aufgabe V5:

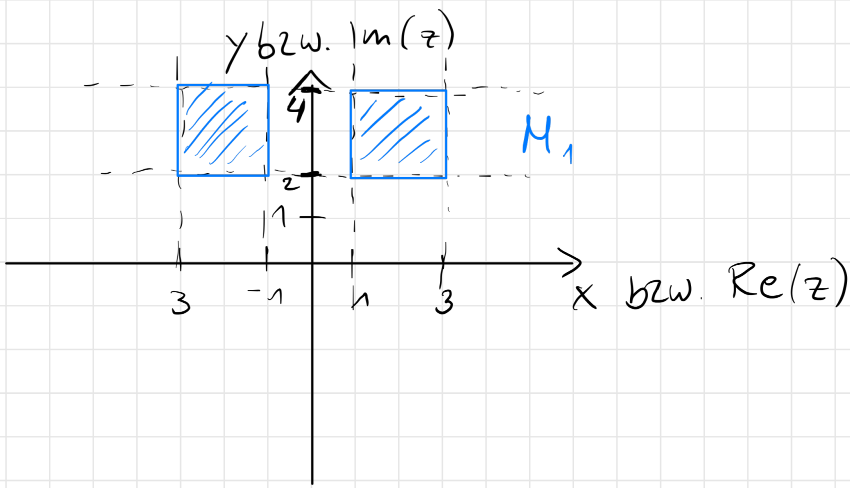
$$M_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq 3 \wedge 2 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 4 \}$$

$$M_1' = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| \leq 3 \wedge 2 \leq y \leq 4 \}$$

Fall 1: $x \geq 0$: $1 \leq x \leq 3$

Fall 2: $x < 0$: $-1 \geq x \geq -3$

Fall-unter-scheidung

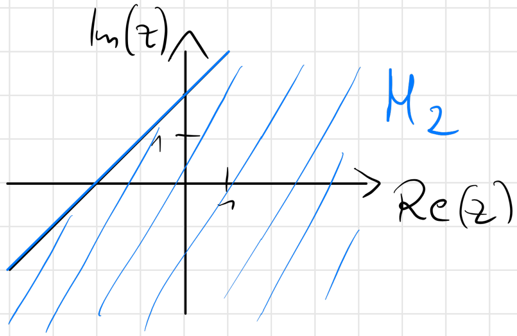


$$M_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) \leq 2 \}$$

$$M_2' = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - x \leq 2 \right\}$$

$$y - x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad y \leq x + 2$$



b) $M_3 = \{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\mathrm{Im}(\frac{2}{z})| > 1 \}$

Was ist $\mathrm{Im}(\frac{2}{z})$?

$$\frac{2}{z} = \frac{2}{x+yi} = \frac{2 \cdot (x-yi)}{(x+yi)(x-yi)}$$

3 Binom Formel

$$= \frac{2x - 2yi}{x^2 - (yi)^2} = \frac{2x - 2yi}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2yi}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{2}{z}\right) = -\frac{2y}{x^2+y^2}$$

Jetzt: Gleichung $|\mathrm{Im}(\frac{2}{z})| > 1$

$$\left|\mathrm{Im}\left(\frac{2}{z}\right)\right| = \left| -\frac{2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{2|y|}{x^2+y^2} > 1 \quad \Big| \cdot (x^2+y^2)$$

$$2|y| > x^2+y^2 \quad \Big| -2|y|$$

$$0 > x^2 + y^2 - 2|y|$$

Betrachtung $0 > \underbrace{x^2}_{(\ )^2} + \underbrace{y^2 - 2|y| + \ldots ?}_{(\quad)^2}$

Erinnerung Kreisgleichung:

Die Kreislinie um den Punkt x_i, y_i mit Radius r wird beschrieben durch

$$\boxed{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r^2}$$

Kreisgleichung

$$0 > x^2 + y^2 - 2|y|$$

$$= (x - 0)^2 + (|y| - 1)^2 - 1$$

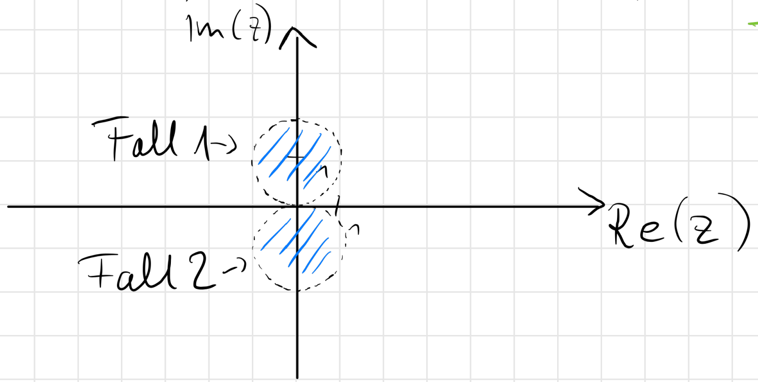
Quadratische Ergänzung

$$1^2 > (x - 0)^2 + (|y| - 1)^2$$

Fall 1: $y \geq 0$: $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 < 1^2$

Fall 2: $y < 0$: $(x - 0)^2 + (y + 1)^2 < 1^2$

Fallunterscheidung



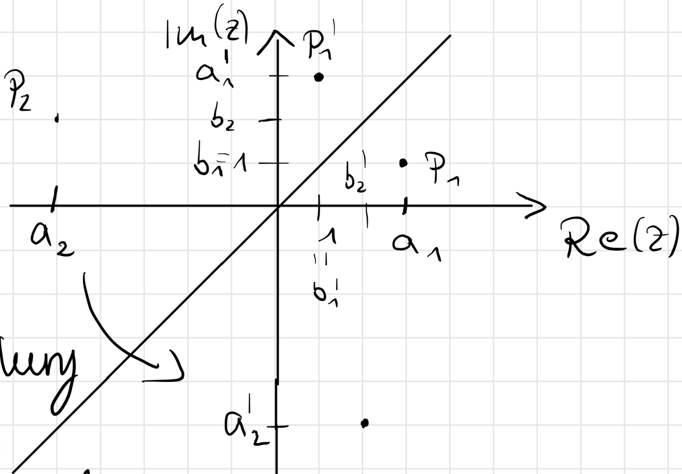
$$M_4 := f(M_3) := \{ f(z) \mid z \in M_3 \}$$

mit $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ a+bi \longmapsto |b| + ai$

Fallunterscheidung

Fallunterscheidung:

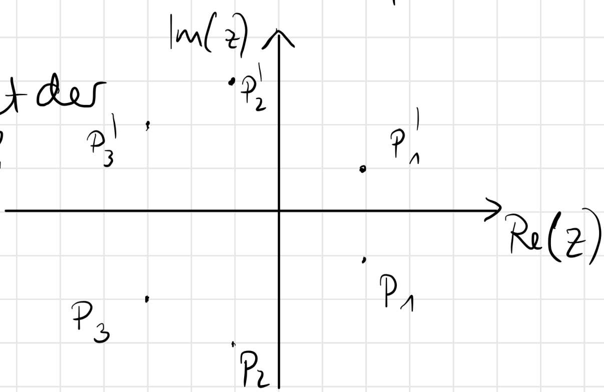
Fall 1: $b \geq 0$: $f(a+bi) = b + ai$



Spiegelung an der Winkelhalbierenden

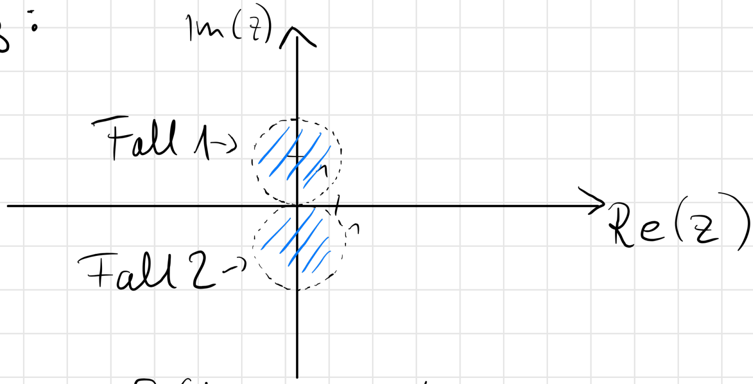
Fall 2: $b < 0$: $f(a+bi) = |b| + ai$

Was bewirkt der Betrag?

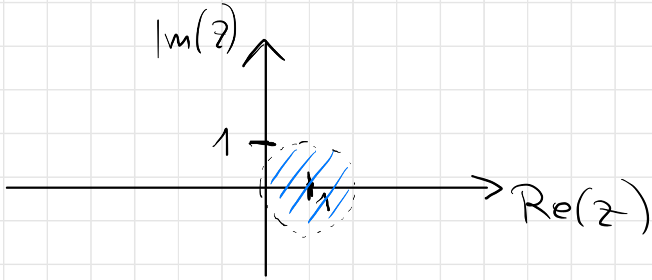


$\Rightarrow$ Erst Spiegelung an der x-Achse, dann Spiegelung an der Winkelhalbierenden

M_3:



$M_4 := f(M_3)$ also

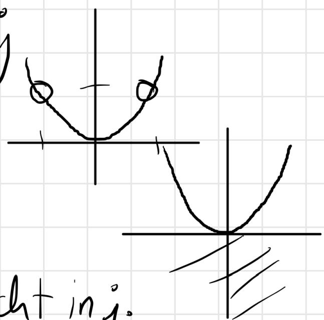


Ist f inj / surj / bij ?

Erinnerung bij = inj + surj

nicht inj:

nicht surj:



- $f(i) = 1 = f(-i) \Rightarrow$ nicht inj.
- Für $z \in \mathbb{C}$ und $Re(z) < 0$ ex. kein $w \in \mathbb{C}$ so, dass $f(w) = z \Rightarrow$ nicht surjektiv
- Nicht inj $\vee$ nicht surjektiv $\Rightarrow$ nicht bijektiv