Vortragsübung 4

Aufgabe V8

a) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{7}{3} \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{(3^2)^n} \right)$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} \right)$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n \right)$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n - \left(\frac{7}{9}\right)^0 - \left(\frac{7}{9}\right)^1 \right)$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n \right) - \frac{7}{3} \cdot 1 - \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{9}$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{9}} - \frac{7}{3} - \frac{49}{27}$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{9}} - \frac{7}{3} - \frac{49}{27}$$

Geometrische Reihe

Für $|q|<1$ gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{2} - \frac{7}{3} - \frac{49}{27}$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{2} - \frac{49}{27}$$

$$= \frac{49}{6} - \frac{49}{27}$$

$$= \frac{9 \cdot 49}{54} - \frac{2 \cdot 49}{54}$$

$$= \frac{7 \cdot 49}{54}$$

$$= \frac{343}{54}$$

Gemeinsamer Nenner?
Primfaktorzerlegung
$6 = 2 \cdot 3$
$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$
$\Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 49 \\ \hline 28 \\ {}_{1}63 \\ \hline 343 \end{array}$$

~~Diese~~ Dies Aufgabe kann auch mit einer Indexverschiebung gelöst werden:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{7}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \frac{7}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{n+2}$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n = \ldots$$

b) $$\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{2n}\,\sqrt{n+1}}}_{b_n :=}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\,\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\,\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{n+1}}$$

Beispiel

$$\sum_{n=3}^{n=5} \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{3}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{4}}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{4}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{5}}}$$

$$+ \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{5}}} - \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{6}}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{2n}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N+1}}}_{\to 0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Aufgabe V9 Untervektorraum

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-i| = \left| z + \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right| \right\}$$

$$|z-i| = \left| z + \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right|$$

$$|x+yi-i| = \left| x+yi + \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right|$$

$$|x+(y-1)i| = \left| x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y+\frac{1}{2}\right)i \right|$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2}$$

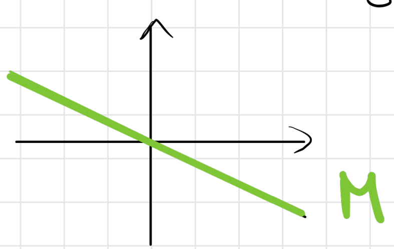
$$\overset{\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad x^2+(y-1)^2 = \left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y\cancel{+1} = \cancel{x^2}+\sqrt{3}x+\cancel{\frac{3}{4}}+\cancel{y^2}+y+\cancel{\frac{1}{4}}$$

$$-2y = \sqrt{3}x + y$$

$$0 = \sqrt{3}x + 3y$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$



Ist M ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$?

Def: $U \subseteq V$ $\mathbb{K}$-Vektorraum

1. $u, v \in U \Rightarrow u+v \in U$

2. $u \in U, s \in K \Rightarrow s \cdot u \in U$

3. $0 \in U$

1. Wähle zwei allg. Punkte $u, v \in M$

$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x_1$

$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x_2$

$$\underbrace{(y_1+y_2)}_{\tilde{y}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{(x_1+x_2)}_{\tilde{x}}$$

$$\tilde{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tilde{x} \Rightarrow \text{Geradengleichung gilt}$$

$\Rightarrow u, v \in M$

2. $x+yi \in U$, $s \in \mathbb{R}$

$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x \Rightarrow sy = -\frac{1}{\sqrt{3}}(sx)$

$$\Rightarrow sw = \underbrace{sx}_{\tilde{x}} + \underbrace{sy}_{\tilde{y}}i \in M$$

3. $0 \in M$? $0+0i$ erfüllt $0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0$ ✓

V 10 Basen

a) zz 1. $L(B_1, B_2, B_3) = \mathbb{R}^3$

2. B_1, B_2, B_3 sind lu.

1. Kann man jedes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ durch Linearkombination der Vektoren B_1, B_2, B_3 erreichen?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad x = 3a + b + 3c$$
$$\text{II} \quad y = 4a$$
$$\text{III} \quad z = 2a + b + c$$

aus $\boxed{II}$ $\quad a = \frac{y}{4}$

$\boxed{I - III}$ $\quad x - z = a + 2c$

$$x - z = \frac{y}{4} + 2c$$

$$c = x - z - \frac{y}{4}$$

$$b = z - 2a - c$$

$$= z - 2\frac{y}{4} - \left(x - z - \frac{y}{4}\right)$$

$$= z - 2\frac{y}{4} - x + z - \frac{y}{4}$$

$$b = 2z - x - 3\frac{y}{4}$$

2.) Ansatz: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = aB_1 + bB_2 + cB_3$

$\overset{1.}{\Rightarrow}$ $a = b = c = 0$ einzige Lösung

$\Rightarrow$ B_1, B_2, B_3 linear unabhängig

$\Rightarrow$ Aus 1) und 2) folgt B ist Basis von $\mathbb{R}^3$

b) $$_B\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

bedeutet:

Finde Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

mit $\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} = a B_1 + b B_2 + c B_3$

1.) scharf hinsehen

$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1$

oder

2.)
$$0 = a \cdot 3 + b \cdot 1 + c \cdot 3$$
$$4 = a \cdot 4 + b \cdot 0 + c \cdot 0$$
$$2 = a \cdot 2 + b \cdot 1 + c \cdot 1$$

lösbar mit zukünftigem Gaußverfahren

oder

Teil 1 aus a

c) lineare Unabhängigkeit?

Ansatz:

$$\lambda_1 \cdot \sin(x) + \lambda_2 \cdot \sin(2x) + \lambda_3 \cdot \sin(3x) = 0$$

(Erklärung zu Idee auf nächster Seite)

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}: \quad 0 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \sin\left(j \frac{\pi}{2}\right) = \lambda_1 - \lambda_3$$

$$\Leftrightarrow \lambda_3 = \lambda_1 \quad (1)$$

$$x = \frac{\pi}{3}: \quad 0 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_3 \sin\left(j \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \lambda_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 \quad (2)$$

$$x = \frac{\pi}{6}: \quad 0 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \sin\left(j \frac{\pi}{6}\right) = \lambda_1 \frac{1}{2} + \lambda_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda_3$$

(1)(2) einsetzen

$$\Rightarrow 0 = \lambda_1 \frac{1}{2} - \lambda_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda_1 = \lambda_1 \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

(1)(2)

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0 = \lambda_3$$

$\Rightarrow \sin(x), \sin(2x), \sin(3x)$ sind l.u.

Basis von $C^0(\mathbb{R})$

$\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$

ist keine Basis von $C^0(\mathbb{R})$,

da $C^0(\mathbb{R})$ unendlich-dim ist.

Idee für a)

Der Ansatz liefert eine Gleichung mit 3 Unbekannten.

<u>Eine</u> Gleichung mit 3 Unbekannten kann im Allgemeinen nicht direkt gelöst werden.

Das Ziel ist also <u>eine</u> Gleichung mit <u>einer</u> Unbekannten. z.B nur λ_1.

Dazu müssen λ_2 und λ_3 durch λ_1 ausgedrückt werden.

Dafür wählt man x so, dass zuerst λ_2 wegfällt und eine Gleichung mit λ_1 und λ_3 übrig bleibt.
Dann wählt ma x so, dass λ_3 wegfällt und eine Gleichung mit λ_1 und λ_2 übrig bleibt
(die letzten zwei Schritte können natürlich auch umgedreht werden)
In einem letzten Schritt wird x so gewählt, dass kein λ wegfällt.