Vortragsübung 5

Aufgabe V11

$\mathrm{Pol}_n \mathbb{R} := \{ \sum_{j=0}^{n} \alpha_j X^j \mid \alpha_j \in \mathbb{R} \}$

a) Nachrechnen der 4. Punkte der Def.

Zuvor vereinfachen des Skalarprodukts

Basis $B: 1, X$

$p(X) = a_1 X + a_0, \quad q(X) = b_1 X + b_0$

$$\langle p | q \rangle := ({}_B p)^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} {}_B q$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 b_0 + \frac{1}{2} b_1 \\ \frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{3} b_1 \end{pmatrix}$$

$$= a_0 \left(b_0 + \frac{1}{2} b_1\right) + a_1 \left(\frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{3} b_1\right)$$

$$= a_0 b_0 + \frac{1}{2}(a_0 b_1 + a_1 b_0) + \frac{1}{3} a_1 b_1 \quad (*)$$

1) zz: $\langle p|q\rangle = \langle q|p\rangle$

$$\langle p|q\rangle \overset{*}{=} a_0b_0 + \frac{1}{2}(a_0b_1+a_1b_0) + \frac{1}{3}a_1b_1$$

$$= b_0a_0 + \frac{1}{2}(b_0a_1+a_0b_1) + \frac{1}{3}b_1a_1$$

$$= \langle q|p\rangle$$

2) zz: $\langle p|p\rangle \geq 0$ und $\langle p|p\rangle = 0 \iff p = 0$

Sei $p(x) = dx + z \in \mathrm{Pol}_1 \mathbb{R}$

$$\langle p|p\rangle = z^2 + dz + \frac{1}{3}d^2$$

Annahme : $\langle p|p\rangle < 0$

Sei $d \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest, dann ist

$z^2 + dz + \frac{1}{3}d^2 - \langle p|p\rangle = 0$ eine

quadratische Gleichung in z

$$\Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4\left(\frac{1}{3}d^2 - \langle p|p\rangle\right)}}{2}$$

$$= \frac{-d \pm \sqrt{-\frac{1}{3}d^2 + 4\langle p|p\rangle}}{2} \quad **$$

Da $\underbrace{-\frac{1}{3}d^2}_{\leq 0} + 4\underbrace{\langle p|p\rangle}_{\substack{<0 \\ \text{nach Annahme}}} < 0$ ist $z_{1/2} \notin \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \langle p|p\rangle \geq 0$$

„$\Rightarrow$" Ist $\langle p|p\rangle = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \dfrac{-d \pm \sqrt{-\frac{1}{3}d^2}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow d = 0, \text{ (weil sonst } z_{1,2} \notin \mathbb{R}) \\ \Rightarrow z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p = 0$$

„$\Leftarrow$" $p(x) = dx + z = 0 \Rightarrow d = z = 0 \overset{*}{\Rightarrow} \langle p|p\rangle = 0$

3) $\langle p|q+r\rangle = \langle p|q\rangle + \langle q|r\rangle$

für $p(x) = a_1X + a_0$, $q(x) = b_1X + b_0$, $r(x) = c_1X + X_0$

$p, q, r \in \mathrm{Pol}_1\mathbb{R}$

$\langle p|q\rangle + \langle q|r\rangle$

$$= ({}_Bp)^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} {}_Bq + ({}_Bp)^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} {}_Br$$

$$= ({}_Bp)^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} ({}_Bq + {}_Br)$$

$$= ({}_Bp)^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} {}_B(q+r) = \langle p|q+r\rangle$$

weil: ${}_B(q+r) = {}_B((b_1+c_1)x + (b_0+c_0)) = \begin{pmatrix} b_0 + c_0 \\ b_1 + c_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = {}_Bq + {}_Br$

4) zz: $s\langle p|q\rangle = \langle sp|q\rangle = \langle p|sq\rangle$

für $s \in \mathbb{R}$, $p(x) = a_1X + a_0$, $q(x) = b_1X + b_0 \in \mathrm{Pol}_1\mathbb{R}$

$$s\langle p|q\rangle = s({}_Bp)^T\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} = ({}_Bp)^T\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}(s\cdot {}_Bq)$$

$$= ({}_Bp)^T\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}{}_B(sq) = \langle p|sq\rangle$$

weil $s\cdot{}_Bq = s\cdot\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}sb_0\\ sb_1\end{pmatrix} = {}_B(sb_1X + sb_0) = {}_B(sq)$

$$s\langle p|q\rangle = s({}_Bp)^T\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}{}_Bq = \left[\left(s({}_Bp)^T\right)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\right]{}_Bq$$

$$= ({}_B(sp))^T\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}{}_Bq = \langle sp|q\rangle$$

weil, $s({}_Bp)^T = s\cdot\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}^T = s\cdot(a_0\ a_1) = (sa_0\ sa_1)$

$$= ({}_B(sa_1X + sa_0))^T = ({}_B(sp))^T$$

$1-4 \Rightarrow \langle\cdot,\cdot\rangle$ ist Skalarprodukt

b) 1) C Basis von $\mathrm{Pol}_1 \mathbb{R}$

2) $\langle c_1 | c_2 \rangle = 0$, $\langle c_1 | c_1 \rangle = 1$, $\langle c_2 | c_2 \rangle = 1$

B erfüllt 1), aber 2) nur teilweise

$$\langle 1 | 1 \rangle = \langle 0 \cdot X + 1 | 0 \cdot X + 1 \rangle \overset{*}{=} 1$$

$$\langle X | X \rangle \overset{*}{=} \frac{1}{3} \neq 1$$

$$\langle 1 | X \rangle = \frac{1}{2} \neq 0$$

Wähle $c_1(x) := 1$ (b_1 von B)

und suche $c_2 = dX + z \in \mathrm{Pol}_1 \mathbb{R}$

mit

$$0 = \langle c_1 | c_2 \rangle \overset{*}{=} z + \frac{1}{2} d \Longleftrightarrow z = -\frac{1}{2} d$$

$$1 = \langle c_2 | c_2 \rangle \overset{*}{=} z^2 + dz + \frac{1}{3} d^2$$

$$\overset{z = -\frac{1}{2}d}{\Longrightarrow} 1 = \frac{1}{4} d^2 \mp \frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{3} d^2 \Longleftrightarrow 12 d^2 \Longleftrightarrow d_{1/2} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow z_{1/2} = \mp \sqrt{3}$$

Wähle z.B. $c_2(x) := 2\sqrt{3} X - \sqrt{3}$

(alternativ: $c_2(x) = -2\sqrt{3} X + \sqrt{3}$)

Zu 1):

$1, \ 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$ sind lin unabh.

Ansatz: $\lambda_1 1 + \lambda_2 (2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) = 0$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$X = \frac{1}{2}$ einsetzen liefert $\lambda_1 = 0$

$\lambda_1 = 0$ und $x = 1$ liefert $\lambda_2 \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

Da $B: 1, X$ eine Basis von $Pol_1 \mathbb{R}$ ist,

folgt $\dim Pol_1 \mathbb{R} = 2$.

$\Longrightarrow \ C: 1, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$ ist Basis von $Pol_1 \mathbb{R}$

$\overset{1) \& 2)}{\Longrightarrow} \ C: 1, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$ ist ONB von $Pol_1 \mathbb{R}$

Aufgabe V 12

a) $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = 4 \right\}$

$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = 2 \right\}$

$= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 2 \right\}$

$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2 \right\}$

$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Aufgabe V13:

a) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} : \quad 1 \times 1$

$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} : \quad 3 \times 3$

$A \cdot B : \quad 1 \times 3$ $\qquad A^T \cdot B : \quad \lightning$

$B \cdot A : \quad \lightning$ $\qquad B \cdot A^T : \quad 3 \times 1$

Ausgerechnet

$$A \cdot A^T = (1 \; -3 \; 5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1+9+25 = 35$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (1 \; -3 \; 5) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 9 & -15 \\ 5 & -15 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = (1 \; -3 \; 5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2+20 \quad 1-6+15 \quad 4-6+10)$$

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3+20 \\ 0-6+10 \\ 4-9+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 b_1 + 3 b_4 = 0 \\ 3 b_1 + 9 b_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{z.B. } b_1 = -3, b_4 = 1$$

analog für andere Spalten von B

also z.B. $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

oder $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

V 14

a) i) $a_n := \frac{4n-1}{n^2}$ $\left(\downarrow^{3}_{0}\right)$ $\sup = 3$, $\inf = 0$

ii) $b_n := \frac{n-1}{n+1}$ $\left(\uparrow^{1}_{0}\right)$ $\sup\ 1$, $\inf\ 0$

iii) $c_n := \sqrt{n^2-n}$ $\left(\uparrow^{\infty}_{0}\right)$ $\sup\ \infty$, $\inf\ 0$

iv) $d_n := n^2 \cdot 5^{-n}$ $\left(\downarrow^{\frac{1}{5}}_{0}\right)$ $\sup\ \frac{1}{5}$, $\inf\ 0$

b) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \qquad \left(\text{Expreihe: } e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} - e$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} - e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - e$$

$$= e - e = 0$$

c) $z \in \mathbb{C}$, $d(z) := |z - 2 + i|) \in \mathbb{R}$

Abstand zu $2 - i$

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid (d(z))^2 - \frac{3}{2} d(z) + \frac{1}{2} = 0 \right\}$$

$u := d(z)$

$$u^2 - \frac{3}{2} u + \frac{1}{2} = 0$$

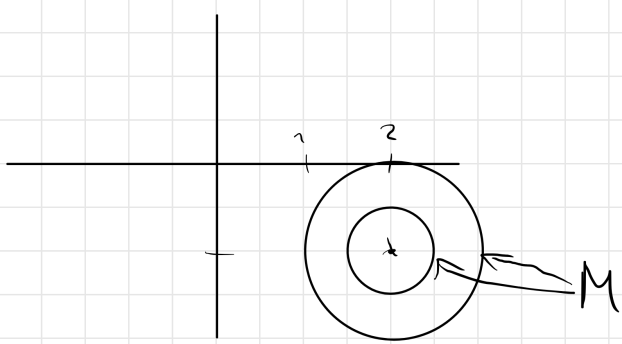
$$u_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2}$$

$$u_1 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 1 \qquad u_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad d(z) = 1, \; d(z) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$



d) $\left(\underbrace{z+3i}_{w:=}\right)^3 = 8i$

$$w^3 = 8i = 8\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad w_0 = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\,\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\,\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{3} + i$$

$$w_2 = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$$

$$= 2\cdot\left(0 + i\cdot(-1)\right)$$

$$= -2i$$

$w = z + 3i$

$\sqrt{3} + i = z_1 + 3i \Rightarrow z_1 = \sqrt{3} - 2i$

$-\sqrt{3} + i = z_2 + 3i \Rightarrow z_2 = -\sqrt{3} - 2i$

$-2i = z_3 + 3i \Rightarrow z_3 = -5i$