Ueb 16

a) ~~line~~ lineare Abbildung

$\delta : \mathrm{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2 \mathbb{R} : p(X) \mapsto p(X) + p'(X)$

$m_1 = 1 \longmapsto 1 = 1 m_1$

$m_2 = X \longmapsto X + 1 = 1 m_2 + 1 m_1$

$m_3 = X^2 \longmapsto X^2 + 2X = 1 m_3 + 2 m_2$

$${}_M\delta_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) i) Kern(δ)

$${}_M\delta_M \cdot {}_M V = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow V_3 = 0 \Rightarrow V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{Kern}(\delta) = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow \delta$ ist injektiv

ii) $\mathrm{Bild}(\delta) = \{\delta(v) \mid v \in V\} \subseteq W$

für $\delta : V \to W$ linear

hier: $V = W = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$

Sei $w(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \in W = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$

Suche $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$

so, dass $w(x) = \delta(p(x))$.

$$\left.\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad b_2 x^2 + b_1 x + b_0 &\overset{!}{=} p(x) + p'(x) \\ &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &\quad + 2a_2 x + a_1 \end{aligned}\right\} (*)$$

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = a_2 x^2 + (a_1 + 2a_2) x + (a_0 + a_1)$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$a_2 = b_2$$

$$2 a_1 + 2 a_2 = b_1$$

$$a_0 + a_1 = b_0$$

a_i mit b_i ausdrücken

$a_2 = b_2$

$a_1 = b_1 - 2a_2 = b_1 - 2b_2$

$a_0 = b_0 - a_1 = b_0 - b_1 + 2b_2$

$\Rightarrow p(x) = b_2 X^2 + (-2b_2 + b_1) X + (2b_2 - b_1 + b_0)$

und dieses $p(x)$ erfüllt

$w(x) = \delta(p(x))$ $(*)$

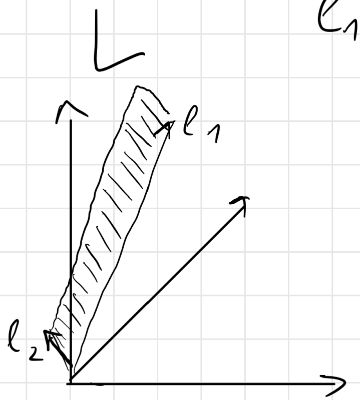
$\Rightarrow$ Damit folgt $\text{Bild}(\delta) = W = \text{Pol}_2 \mathbb{R}$

(Begründung: Es gibt zu jedem $w(x) \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$ ein $p(x) \in \text{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit $w(x) = \delta(p(x))$

$\Rightarrow$ δ surjektiv

iii) inj + surj $\Rightarrow$ bijektiv

c) Ebene $L(\underbrace{(1,3,2)^T}_{l_1 :=}, \underbrace{(-1,0,1)^T}_{l_2 :=})$



Basis von $\mathbb{R}^3$ für eine angenehme Beschreibung der Ebene

$$l_1,\ l_2,\ l_1 \times l_2$$

$$l_1 \times l_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b_1, b_2, b_3 lu?

$$Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow b_1, b_2, b_3 \text{ sind l.u}$$

$${}_E\gamma_E = {}_E id_B \; {}_B\gamma_B \; {}_B id_E$$

$${}_B\gamma_B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

b_1 bleibt gleich unter γ

b_2 bleibt gleich unter γ

b_3 wird gespiegelt und ändert Orientierung under γ

$${}_E id_B = ({}_E b_1, {}_E b_2, {}_E b_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}_B id_E = ({}_E id_B)^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 3I \\ III - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :3 \\ :9 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} + 4\,\mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{II} - 3\,\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array}$$

NR: $1 \quad 0 \quad 0 \;\Big|\; 1 - \frac{5}{9} - \frac{3}{9} \qquad -\frac{1}{9} + \frac{3}{9} \qquad \frac{4}{9} - \frac{3}{9}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

$${}_B\mathrm{id}_E = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_E\gamma_E = {}_E\mathrm{id}_B \cdot {}_B\gamma_B \cdot {}_B\mathrm{id}_E$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

V1A7

a) $\det \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$$= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$= -2 \cdot \left(-1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -2 \cdot \left(-(3 \cdot 1 - 0) + (2 \cdot 1 + 6) \right)$$

$$= -2 \, (-3 + 8) = -2 \cdot 5 = -10$$

(*) hier alternativ Sarrus, oder Elementare Zeilenumformungen

Sarrus

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \\
\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{matrix} \\
\begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}
\end{array}
$$

$$= -1\cdot 3\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot(-2) + 1\cdot 2\cdot 1$$

$$- (-2)\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 0$$

$$= -3 + 2 + 6 = 5$$

Elementare Zeilenumformungen:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -1\cdot(3\cdot 1 - 4\cdot 2)$$

$$= -1\cdot(3-8) = 5$$

b)

$$\det(B_\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & & & \\ 0 & 1 & 3 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 3 & 3 & 0 & 3 & & & \\ & & & & \alpha-1 & 2 & 0 \\ & 0 & & & 2 & \alpha+1 & 0 \\ & & & & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha-1 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha+1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \big((\alpha-1)\cdot(\alpha+1)-4\big)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (-10) \cdot 2\,(\alpha^2-1-4)$$

$$= -30\,(\alpha^2-5) \neq 0 \text{ für } \alpha \neq \pm\sqrt{5}$$

$\Rightarrow B_\alpha$ ist invertierbar für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$