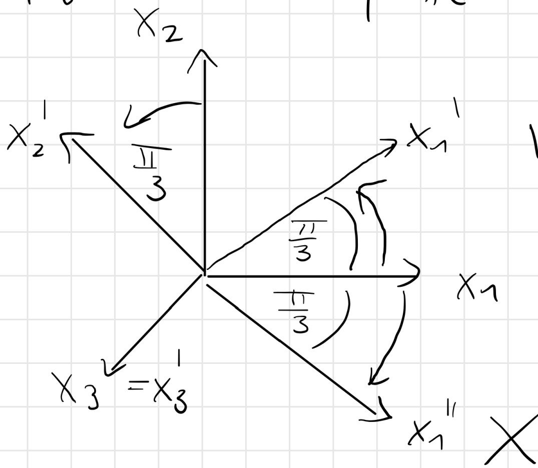
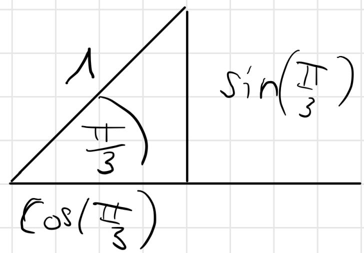
V1 8

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$





a)

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \cos(\frac{\pi}{3}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = e_3$$

$$\varepsilon f \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

An diese Stelle vereinfacht angeben:

$$\varepsilon f_\varepsilon = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Anschaulich: 1 ist reeller EW

Charakteristisches Polynom:

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 + \frac{3}{4}\right)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \qquad \downarrow = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{+1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 1)\left(\lambda - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right) \cdot \left(\lambda - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)$$

$$(A - 1 \cdot E) \cdot v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{III} \Rightarrow v_3$ „beliebig"

$$\mathrm{I}: -\frac{1}{2}v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_2 = 0$$

$$v_1 = \sqrt{3}\,v_2$$

$$\mathrm{II}: \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = 0$$

$$\sqrt{3}\,v_1 = v_2$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$v(\lambda_1) = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(A - \lambda_2 E)\,v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow v_3 = 0$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \quad i v_1 + v_2 = 0$$
$$\mathrm{II} \Rightarrow \quad v_1 - v_2 i = 0$$

Vielfache von $v_1 = 1$ & $v_2 = -i$

z.B auch $v_1 = i$, $v_2 = 1$

Kann man auch über die Stufenform lösen!

$$v(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$(A - \lambda_3 E) v = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{pmatrix} \cdot v = 0$$

$$\mathrm{III} \Rightarrow \quad v_3 = 0$$

$$\mathrm{I}: \quad \frac{\sqrt{3}}{2} i \, v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 = 0$$

$$\mathrm{II}: \quad \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} i \, v_2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad i v_1 = v_2 \\ \mathrm{II}: &\quad v_1 = -v_2 i \end{aligned}\right\} \quad \text{Vielfache von } v_1 = 1 \ \& \ v_2 = i$$

$$\Rightarrow \quad v(\lambda_3) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Auch hier kann man die Stufenform nutzen!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \overline{\mathrm{II}+i\mathrm{I}} \\ \\ \end{array}$$

$\Rightarrow$ Das führt zu einer Nullzeile!

V 19

Erinnerunge!

a) Geometrische Vielfachheit d_μ

Dimension des Eigenraums $V(\mu)$

mit μ EW

&

Algebraische Vielfachheit e_μ:

Vielfachheit von μ als Nullstelle

des charakteristischen Polynoms

&

$$d_\mu \leq e_\mu$$

1.) $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$

$$= -\lambda \; (\lambda - 1)^2$$

$\Rightarrow$ $\lambda = 0$ ist EW von A

mit algebraischer Vielfachheit

$e_0 = 1$

2.) Für die geometrische Vielfachheit

gilt $d_0 = \dim(\mathrm{Kern}(A)) \leq 1$,

weil $d_0 \leq e_0 = 1$.

3) Da 0 EW von A ist,

folgt $\mathrm{Rang}(A) < 3 = n$.

Und da $\mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{Bild}(A))$

gilt mit der Dimensionsformel

$$3 = \dim A = \dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A))$$

dass $\dim(\mathrm{Kern}(A)) \geq 1$ ist.

4) aus 2) & 3) folgt:

$$\dim(\mathrm{Kern}(A)) = 1$$

5) Die Auswertung des charakteristischen Polynoms von B in 0 ist 3.

Also ist 0 kein EW von B
und insbesondere ist B invertierbar

6) AB hat den EW 0, weil
$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$,
d.h. 0 ist eine NS des charak Pol von AB.
Betrachtet man $A(Bx) = 0$
bzw. $Av = 0$ mit $v = Bx$,
dann kann der Basisvektor
des Eigenraums von A und EW 0
über $x = B^{-1} \cdot v$ übertragen werden.
(Die Existenz der Inversen von B
ist nichts anderes als eine Bijektion)
Daraus folgt, dass 0 ein
EW von AB ist mit
$\dim(\mathrm{Kern}(AB)) = 1$ also
geometrischer Vielfachheit 1.

b) Das ist falsch.

Achtung vgl. zum Skript:

Die zwei Aussagen sind keine Äquivalenz!

Gegenbeispiel:

Grundidee: Eine der Matrizen ist die Einheitsmatrix, damit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$T^{-1} B T = T^{-1} T = E_2 = B \neq A$$

$\Rightarrow$ A & B sind nicht konjugiert zueinander

c) Das ist falsch!

Gegenbeispiel

$A = A^T$ so, dass $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2$$

$$= ad + \lambda^2 - a\lambda - d\lambda - b^2$$

$$= \lambda^2 + (-a-d)\lambda + (ad - b^2)$$

$$\overset{!}{=} \lambda^2 + 1$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$-a-d = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -d$$

$$ad - b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{-d^2 - b^2}_{\substack{<0 \\ \text{weil } a,b \in \mathbb{R}}} = 1 \quad \lightning$$

V 20)

a) $\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (-2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (-2-\lambda)\cdot(4-\lambda)\left((2-\lambda)\cdot(2-\lambda)-4\right) =$

Achtung: Das sind keine Linearfaktoren!

$= (-2-\lambda)(4-\lambda)(4-4\lambda+\lambda-4)$

$= (-2-\lambda)(4-\lambda)(-4\lambda+\lambda)$

$= -(2+\lambda)(4-\lambda)(-4+\lambda)\cdot\lambda$

$= (2+\lambda)(4-\lambda)^2\cdot\lambda$

b) 0 ist EW von A damit $\det(A) = 0$, und deshalb ist A NICHT invertierbar.

Vielen Dank für die angenehme Zusammenarbeit!

Wir werden uns im Sommersemester wiedersehen