Übungsblatt 2

»Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse.«

(Rene Descartes; 1596–1650)

Alle Aussagen, die Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben treffen, sind stets (mit bereits behandeltem Vorlesungsstoff) zu begründen; dazu empfiehlt sich ein regelmäßiger Besuch der Vorlesung.

V 2.1. Diese Aufgabe geht auf Prof. Pöschels (Uni Stuttgart) Buch *Etwas Analysis* zurück; sie ist zu schön, als dass wir auf sie verzichten wollen:

In einem Zoologiebuch aus Gallusien heißt es: »Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig, und jede foberante Kalupe ist dorig. In Gallusien gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen«. — Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Aussagen, die *nicht ableitbar* sind, sind dabei als falsch zu bewerten. Das Präfix *un-* ist gleichbedeutend mit der logischen Negation.

(a) Es gibt gebrochselte Kalupen.

(b) Es gibt sowohl gebrochselte als auch ungebrochselte Kalupen.

(c) Alle undorigen Kalupen sind gebrochselt.

(d) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.

V 2.2. Sei die Aussageform $p(x)$ definiert durch $x^2 < 9$. Geben Sie jeweils eine (von $p(x)$ verschiedene) Bedingung für x an, die

(a) notwendig, aber nicht hinreichend;

(b) hinreichend, aber nicht notwendig;

(c) hinreichend und notwendig;

(d) weder hinreichend noch notwendig

für $p(x)$ ist.

V 2.3. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der aus der Schule bekannten natürlichen Zahlen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen **sowie ihre Negation** mit Hilfe der Quantoren $\exists$ und $\forall$. Welche der Aussagen sind wahr, welche falsch?

(a) Es gibt natürliche Zahlen m und n mit $m + n \in \mathbb{N}$ und $m - n \in \mathbb{N}$.

(b) Die Gleichung $m^2 = n + 5$ besitzt für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Lösung $n \in \mathbb{N}$.

(c) Es gibt gerade $n \in \mathbb{N}$, die als Summe zweier Quadratzahlen geschrieben werden können.

Bitte wenden!

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de

V 2.4. Es seien A, B, I, M beliebige Mengen und $\{A_i : i \in I\}$ sei eine Familie von Mengen, wobei $i \in I$ eine Indexvariable ist. Beweisen Sie durch Verwendung aussagenlogischer Operationen

(a) $(A \cup B)^c_M = (A^c_M) \cap (B^c_M)$,

(b) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c_M = \bigcap_{i\in I} (A_i)^c_M$,

(c) $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$.

Skizzieren Sie den Fall **(a)** mit Hilfe von Venn-Diagrammen für

(i) $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$ mit $A \cap B = \emptyset$,

(ii) $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$ mit $A \cap B \neq \emptyset$,

(iii) $A \subseteq B \subseteq M$,

(iv) $A \subseteq B = M$.

V 2.5. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung (Funktion) zwischen den Mengen A und B, also eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein eindeutig bestimmtes Element $f(x) \in B$ zuordnet. Dann ist für $C \subseteq A$ das Bild von C unter f definiert als $f(C) := \{f(c) : c \in C\}$. Zeigen Sie für $C_1, C_2 \subseteq A$

(a) $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$ sowie **(b)** $f(C_1 \cap C_2) \subseteq f(C_1) \cap f(C_2)$.

Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Gleichheit in **(b)** an.

Z 2.6. Diese Aufgabe kann nicht votiert werden; sie dient lediglich Ihrer Unterhaltung (etwa während einsamer Bahnfahrten).
In der Bibliothek des Grafen Dracula gibt es keine zwei Bücher, deren Inhalt aus gleich vielen Wörtern besteht. Außerdem ist die Anzahl der Bücher größer als die Anzahl der Wörter jedes einzelnen Buches. Damit ist der Inhalt mindestens eines der Bücher klar. Was steht in diesem Buch?

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de