Übungsblatt 3

»Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt.«

(Carl Friedrich Gauß; 1777 – 1855)

Wie immer sind alle Aussagen sauber zu begründen.

S 3.1. **Zu dieser Aufgabe sollten Sie zum Abgabetermin (4.11.2019) eine schriftlich von Ihnen ausgeführte Lösung Ihrem Tutor/Ihrer Tutorin überreichen. Auf die Abgabe gehört natürlich auch Ihr Name.**

(a) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 .$$

(b) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, welche sind surjektiv?

(i) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{x}$

(ii) $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \dfrac{1}{x}$

(iii) $h\colon [-\pi, \pi] \to [-\pi, \pi]$ mit $h(x) := \sin(x)$

V 3.2. Beweisen Sie die folgenden Identitäten mit Hilfe vollständiger Induktion für beliebige $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{n!2^n}$

V 3.3. Es sei M eine nichtleere Menge. Wir können jede beliebige Teilmenge $A \subseteq M$ einer Abbildung

$$\chi_A\colon M \to \{0,1\} \quad \text{mit} \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

zuordnen. Die Abbildung χ_A wird *Indikatorfunktion* oder auch *charakteristische Funktion* zu A genannt. Umgekehrt ist jede Abbildung $f\colon M \to \{0,1\}$ die charakteristische Funktion zu einer Teilmenge $B \subseteq M$.

Seien nun also $A, B \subseteq M$ beliebige Teilmengen. Stellen Sie die charakterische Funktion von A^c_M, $A \setminus B$, $A \cup B$ und $A \cap B$ mit Hilfe der charakterischen Funktionen zu A und B dar.

Bitte wenden!

V 3.4. Wir definieren die Abbildungsvorschrift $f(x) := |1 - |x||$ für $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Teilmengen $A, B, C, D \subseteq \mathbb{R}$, so dass die folgenden vier Eigenschaften gleichzeitig erfüllt sind.

(i) $A \ni x \mapsto f(x) \in B$ ist surjektiv.

(ii) $B \ni x \mapsto f(x) \in C$ ist injektiv.

(iii) $C \ni x \mapsto f(x) \in D$ ist bijektiv.

(iv) $D \ni x \mapsto f(x) \in A$ ist weder surjektiv noch injektiv.

Hinweis: Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

V 3.5. Es seien M, N nichtleere Mengen. Beweisen Sie:

(a) $f\colon M \to N$ ist surjektiv. $\Leftrightarrow$ Es existiert $g\colon N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

(b) $f\colon M \to N$ ist injektiv. $\Leftrightarrow$ Es existiert $g\colon N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.