Apl. Prof. Dr. J. Wirth
Jonas Brinker, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.
Dominik Wittwar, M.Sc.

Übungsblatt 4

»Man lernt Mathematik nicht, man gewöhnt sich nur daran.«

(Paul Erdös; 1913–1996)

V 4.1. Skizzieren Sie diejenigen Bereiche der (x, y)-Ebene, für welche

(a) $|x+1| - |x-1| = 1$

(b) $x^2 - y + 2x \leq 0 \quad \wedge \quad y \leq 0$

(c) $|x-2| < 3 \quad \vee \quad |y+1| \leq 2$

gilt.

V 4.2. Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass dann jede der Ungleichungen

$$\min\{a, b\} \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max\{a, b\}$$

gilt. Welche der Ungleichungen gelten auch für $a, b \geq 0$ und wann gilt sogar Gleichheit?

V 4.3. Beweisen Sie die folgenden beiden Ungleichungen für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

(a) $2xy \leq \varepsilon x^2 + \dfrac{y^2}{\varepsilon}$

(b) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$

Die Ungleichung in **(a)** bezeichnet man oft als *Young-Ungleichung*, **(b)** heißt *umgekehrte Dreiecksungleichung*.

V 4.4. Stellen Sie eine Vermutung auf, für welche $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung gilt und beweisen Sie Ihre Behauptung induktiv:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de