Übungsblatt 5

»Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken.«

(David Hilbert; 1862 – 1943)

V 5.1. **(a)** Bestimmen Sie (sofern existent) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [1+\frac{1}{n}, 1+n].$$

Hinweis: Eine Skizze könnte hilfreich sein.

(b) Es sei I eine Indexmenge und $M_i \subset \mathbb{R}$ für $i \in I$. Wir definieren

$$M := \bigcup_{i\in I} M_i.$$

Zeigen Sie, dass $\sup M = \sup\{\sup M_i \mid i \in I\}$ und $\inf M = \inf\{\inf M_i \mid i \in I\}$.

V 5.2. Berechnen Sie für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die orthogonale Zerlegung $\vec{a}$ bezüglich $\vec{b}$, d.h. finden Sie den Vektor $\vec{a}^{\|}$ parallel zu $\vec{b}$ und den Vektor $\vec{a}^{\perp}$ orthogonal zu $\vec{b}$, so dass $\vec{a} = \vec{a}^{\|} + \vec{a}^{\perp}$. Dabei sei

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. **(b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Siehe Vortragsübung.

V 5.3. Im Raum können wir Drehungen (gegen den Uhrzeigersinn) um die j-te Koordinatenachse durch

$$D_{j,\alpha}(\vec{a}) := a_j\vec{e}_j + \cos(\alpha)(\vec{a} - a_j\vec{e}_j) + \sin(\alpha)\vec{a} \times \vec{e}_j, \quad j \in \{1,2,3\},$$

darstellen. Anders als in der Ebene hängt im Raum das Ergebnis mehrerer hintereinander ausgeführter Drehungen von deren Reihenfolge ab.

(a) Beschreiben Sie möglichst allgemein, wann das Kreuzprodukt mit einem festen Vektor eine Drehung innerhalb einer Ebene beschreibt.

(b) Finden Sie ein möglichst einfaches Beispiel für Winkel α, β und einen Vektor $\vec{a}$, so dass

$$D_{1,\alpha} \circ D_{2,\beta}(\vec{a}) \neq D_{2,\beta} \circ D_{1,\alpha}(\vec{a}).$$

V 5.4. Begründen Sie die folgenden Identitäten für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ im Raum.

(a) zyklisches Vertauschen $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$

(b) paarweises Vertauschen $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$

V 5.5. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ im Raum.

(a) die Grassmann-Identität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

(b) die Lagrange-Identität $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

Hinweis: Nutzen Sie Koordinatenvektoren.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de