Übungsblatt 6

»Sie dürfen nicht alles glauben, was Sie denken.«

(Heinz Erhardt; 1909 – 1979)

S 6.1. Gegeben seien die komplexen Zahlen $u = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ und $v = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Wie in der Vorlesung bezeichnen wir die Schreibweise $z = x + \mathrm{i}y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ als *kartesische Darstellung* und $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ (mit $r > 0$ und $0 \leq \phi < 2\pi$) als ihre *Polardarstellung*.

(a) Bestimmen Sie $|u|$ und $|v|$ sowie $\arg(u)$ und $\arg(v)$. Schreiben Sie u in Polardarstellung und v in kartesischer Darstellung.

(b) Berechnen Sie uv und $\frac{u}{v}$. Skizzieren Sie u, v, uv und $\frac{u}{v}$ in eine gemeinsame komplexe Zahlenebene.

(c) Bestimmen Sie explizit alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = 32\mathrm{i}$ und zeichnen Sie diese in eine neue komplexe Zahlenebene.

V 6.2. Bestimmen Sie zu den folgenden komplexen Zahlen $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$ jeweils ihren Real- und Imaginärteil und bestimmen Sie ihren Betrag $|z_k|$, $k = 1, \dots, 4$. Wie immer gilt: Vereinfachen Sie alle Terme so weit wie möglich; insbesondere sollen potentiell auftretende Nenner stets reell sein.

(a) $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ **(b)** $z_2 = -\dfrac{2}{\mathrm{i}} + \dfrac{3}{1+\mathrm{i}}$ **(c)** $z_3 = \dfrac{(2+2\mathrm{i})^3}{4}$ **(d)** $z_4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{245} \mathrm{i}^k$

V 6.3. Zeichnen Sie folgende Mengen in der komplexen Ebene.

(a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z \;\vee \operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z\}$

(b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| + \operatorname{Re} z \leq 1\}$

(c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; 1 \leq |z - 1 - \mathrm{i}| < 3\}$

V 6.4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$.

(a) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$

(b) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

(c) $(\overline{w})^{-1} = \overline{(w^{-1})}$ und $|w^{-1}| = \frac{1}{|w|}$

V 6.5. Bestimmen Sie die Lösungsmengen $L \subseteq \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen.

(a) $2z^2 - 2z = -1$

(b) $5z^4 + 6z^2 + 1 = 0$

(c) $z^3 + 5z^2 + 4z + 20 = 0$

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de