Übungsblatt 7

»In some sort of crude sense which no vulgarity, no humor, no overstatement can quite extinguish, the physicists have known sin; and this is a knowledge which they cannot lose.«

(Robert Oppenheimer; 1904 – 1967)

V 7.1. **(a)** Nutzen Sie die Multiplikation in $\mathbb{C}$ und leiten Sie damit die Additionstheoreme

$$\sin(\phi+\psi) = \sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\psi)$$
$$\cos(\phi+\psi) = \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi)$$

für Winkel $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ her.

(b) Drücken Sie $\cos(5\phi)$ in Abhängigkeit von $\cos(\phi)$ aus.
Hinweis: Gehen Sie wie in Teilaufgabe **(a)** vor.

V 7.2. Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}$ für $j = 0, \ldots, n$.

(a) Sei z eine rationale Nullstelle von p in Form eines gekürzten Bruchs $z = \frac{a}{b}$. Zeigen Sie, dass a den Koeffizienten a_0 teilt und b den Koeffizienten a_n teilt.

(b) Sind alle Nullstellen von p von dieser Form?

V 7.3. Finden Sie die Lösungsmengen $L \subset \mathbb{C}$ zu den folgenden Gleichungen und skizzieren Sie diese.

(a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}$ **(b)** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{4\mathrm{i}z+5} = 0$ **(c)** $\cos(z) = 2$

V 7.4. **(a)** Bestimmen Sie ein Polynom p, für welches

$$p(0) = 0, \quad p(3) = 5, \quad p(4\mathrm{i}) = 0 \quad \text{und} \quad p(1+2\mathrm{i}) = \mathrm{i}$$

gilt.

(b) Seien $z_0, z_1, \ldots, z_n$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Bestimmen Sie ein Polynom p vom Grad n mit

$$p(z_0) = 1 \quad \text{und} \quad p(z_1) = p(z_2) = \cdots = p(z_n) = 0.$$

(c) Sei nun $w \in \mathbb{C}$ eine gegebene komplexe Zahl. Bestimmen Sie ein Polynom p, für welches

$$p(0) = 0, \quad p(3) = 5, \quad p(4\mathrm{i}) = w \quad \text{und} \quad p(1+2\mathrm{i}) = \mathrm{i}$$

gilt. Nutzen Sie dazu die Lösungen aus **(a)** und **(b)**.