Übungsblatt 8

»Geography is just physics slowed down, with a couple of trees stuck in it.«

(Terry Pratchett; 1948 – 2005)

V 8.1. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie (falls existent) ihre Grenzwerte.

(a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2-1}$ für $n \geq 2$

(b) $b_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$

(c) $c_n = \frac{2n+1}{n+3} + \frac{4n^2+3n+1}{(2n+1)^2}$

(d) $d_n = \frac{2^n-4^n}{4+3^n}$

(e) $e_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+3}$

(f) $f_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

V 8.2. Sei $a > 1$ fest gewählt und seien die drei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n}, \qquad y_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \qquad \text{und} \qquad z_n = \sqrt{n+\frac{n}{a}} - \sqrt{n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $n < a^2$ stets $x_n > y_n > z_n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass im Grenzwert für $n \to \infty$ jedoch $x_n \to 0$, $y_n \to 1/2$ und $z_n \to \infty$ gilt.

V 8.3. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei komplexe Zahlenfolgen und sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $z_n := x_n y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $y = 0$. Beweisen Sie ausgehend von der Definition, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen Null konvergiert; geben Sie dazu das N_ε an, so dass $|z_n - 0| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$.

(b) Konvergiere nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{C}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $y \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie ausgehend von der Definition, dass $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = xy$ gilt.

V 8.4. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Zahlenfolge, die nicht gegen Null strebt. Beweisen Sie

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ist konvergent} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (|z_n|)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (\arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{sind konvergent.}$$

Weshalb ist die Bedingung, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert, notwendig?

V 8.5. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right)^n$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-3)^n}{\pi^n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n!)^2}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de