Apl. Prof. Dr. J. Wirth
Jonas Brinker, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.
Dominik Wittwar, M.Sc.

Übungsblatt 9

»Do not worry about your difficulties in Mathematics. I can assure you mine are still greater.«

(Albert Einstein; 1879 – 1955)

V 9.1. Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n := \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$$

konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton wächst.

(b) Weisen Sie $a_n < 2$ für $n \in \mathbb{N}$ nach.

(c) Stellen Sie eine Gleichung für den Grenzwert von (a_n) auf und lösen Sie diese.

V 9.2. Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen und $\sigma_n := \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

(a) Zeigen Sie: Konvergiert (a_n), so konvergiert auch (σ_n) und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$.

(b) Finden Sie ein Beispiel für (a_n), so dass (σ_n) konvergiert aber (a_n) divergiert.

V 9.3. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ abgesehen von endlich vielen Folgengliedern monoton und beschränkt ist und somit konvergiert.

(b) Zeigen Sie damit, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{x}{m}\right)^m = 1.$

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von **(a)** und Grenzwertsätzen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2$$

V 9.4. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf ihre Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+10n}{4^n-n^5}$

V 9.5. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf ihre Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{\sqrt{n}}$

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de