

Übungsblatt 11

»She knew a cutting, incisive, withering and above all a self-evident answer existed.

It was just that, to her extreme annoyance, she couldn't quite bring it to mind.«

("Equal Rites" von Terry Pratchett; 1948 – 2015)

V 11.1. Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die unten definierte Funktion g stetig ist.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \begin{cases} \sin(2\pi x), & x \leq 1 \\ \alpha x - 2, & x \in (1, 2] \\ \beta e^x, & x > 2 \end{cases}$$

V 11.2. Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe des Zwischenwertsatzes.

(a) Es seien $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ existiert.

(b) Ein Zug benötigt für 500 km genau 10 Stunden, fährt also mit 50 km/h Durchschnittsgeschwindigkeit. Auf der Strecke fährt er mit unterschiedlicher Geschwindigkeit und hält öfters. Gibt es während der 10 Stunden einen Zeitraum von einer Stunde Dauer, in dem der Zug genau 50 km zurücklegt?

Hinweis: Betrachten Sie den in der letzten Stunde zurückgelegten Weg $\Delta(t) = x(t) - x(t-1)$ für $1 \leq t \leq 10$.

V 11.3. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sin(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

Anmerkung: Sie dürfen dabei nicht die Regel von l'Hospital verwenden.