# Übungsblatt 13

*»I recoil with dismay and horror at this lamentable plague of functions which do not have derivatives.«*

(Charles Hermite; 1822 – 1901)

**V 13.1.** Berechnen Sie die folgenden (uneigentlichen) Grenzwerte. Dabei sind $a, b, c, d > 0$ beliebig.

**(a)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$ **(b)** $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a + be^x)}{\sqrt{c + dx}}$ **(c)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) + x^2}{(1+x)^5 - 1 + x^2}$

**V 13.2.** Berechnen Sie die folgenden (uneigentlichen) Grenzwerte. Dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

**(a)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$ **(b)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^2 - \sin(x)^2}{1 - e^{-x^2}}$ **(c)** $\lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{\sin(x)}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$

**V 13.3.** **(a)** Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ zwei $m$-mal differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die *Leibnitz Formel*

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)}\, g^{(m-k)}$$

für die $m$-fache Ableitung, $(fg)^{(m)}$, von $f \cdot g$.

**(b)** Berechnen Sie $h^{(10)}(x)$ für $h(x) = xe^{-2x}$.

**V 13.4.** Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(a,b)$. Außerdem sei $f(a) \geq g(a)$, sowie $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de