# (Zusatz-)Übungsblatt 15

*»I learned very early the difference between knowing the name of something and knowing something.«*

(Richard Phillips Feynman; 1918 – 1988)

**Dieses Übungsblatt ist ein Zusatzblatt für all diejenigen, auf welche die Bedingungen für den Ausgleich von Scheinkriterien (siehe Vorlesungshomepage) zutreffen. Für alle anderen kann es als freiwillig zu bearbeitendes Wiederholungsblatt interpretiert werden.**
**Eine Besprechung der Aufgaben findet nicht statt.**

**Z 15.1.** Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

**Z 15.2.** Wir definieren eine Folge $(x_n)$ durch die rekursive Vorschrift

$$x_0 \in (0,1) \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + x_0}{x_0 + 1}} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

**(a)** Beweisen Sie, dass $0 \leq x_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)$ monoton wachsend ist.

**(c)** Weisen Sie die Existenz von $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ nach. Bestimmen Sie $x$.

**Z 15.3.** Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Dabei seien $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^{(n^2)}}\, x^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}\, x^{(n^2)}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$

*Hinweis:* Bei **(c)** könnte der Vergleich mit einem Integral hilfreich sein.

**Z 15.4.** Sei $\alpha \in \mathbb{N}$ fest gewählt und sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \frac{1}{x^{\alpha}}$ definiert.

**(a)** Weisen Sie die Stetigkeit von $f$ mit Hilfe des $\varepsilon$-$\delta$-Kriteriums nach.

**(b)** Die Funktion $f$ ist *gleichmäßig stetig*, wenn wir $\delta$ unabhängig vom Basispunkt wählen können; d.h.

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x,y\in(0,\infty)}\,:\; |x-y| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Beweisen Sie, dass $f$ *nicht* gleichmäßig stetig ist.

**Bitte wenden!**

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de

**Z 15.5.** Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$ durch. Betrachten Sie dafür

**(i)** Definitions- und Wertebereich,
**(ii)** Asymptotisches Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$,
**(iii)** Nullstellen und Extrema,
**(iv)** Monotoniebereiche,
**(v)** Wendepunkte,
**(vi)** Konvexitätsintervalle

und skizzieren Sie den Graphen von $f$.

**Z 15.6.** Berechnen Sie die folgenden ...

**(a)** ... bestimmten Integrale:

**(i)** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$ **(ii)** $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10} \, \mathrm{d}x$ **(iii)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$

**(b)** ... unbestimmten Integrale:

**(i)** $\displaystyle\int x^3 \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ **(ii)** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x$ **(iii)** $\displaystyle\int x \, (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x$