Vortragsübung 1

V 1.1. Sei $\sqrt{x}$ die aus der Schule bekannte Wurzel einer nicht-negativen Zahl $x \in \mathbb{R}$. Finden Sie alle $x \geq 0$ mit

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 2.$$

Begründen Sie, warum Sie tatsächlich alle solche x gefunden haben.

V 1.2. Gegeben seien die beiden Mengen $M = \{2, 5\}$ und $N = \{4, 5, 7\}$.

(a) Bestimmen Sie $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$, $M^{c}_{\mathbb{N}}$, $M \times N$ und $N \times M$. Skizzieren Sie die letzten beiden Mengen. Wie viele Elemente besitzen diese jeweils?

(b) Die *symmetrische Differenz* $A \triangle B$ zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Beweisen Sie, dass $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ gilt und bestimmen Sie $M \triangle N$ sowie $N \triangle M$.

Definition 1 *Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Intervalle*

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, & (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \\ [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, & (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

V 1.3. Gegeben seien die drei Intervalle $I_1 = [1, 3]$, $I_2 = [2, 5]$ und $I_3 = (2, 5]$.

(a) Bestimmen Sie $I_1 \cap I_j$ und $I_1 \cup I_j$ für $j \in \{1, 2\}$, sowie $I_2 \cap I_3$.

(b) Berechnen Sie weiter $I_1 \triangle I_3$.

(c) Skizzieren Sie $I_1 \times I_1$ und $I_1 \times I_2$.

V 1.4. Sei $|x|$ für $x \in \mathbb{R}$ der aus der Schule bekannte Betrag von x. Gegeben seien die drei Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}, \qquad B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\}, \\ C &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie A, B, und C.

(b) Beweisen Sie $A \subseteq B \subseteq C$.