Vortragsübung 2

V 2.1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to [-3, \infty)$ mit $f_1(x) = x^2 - 4x + 1$,

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = x/(1 + x^2)$,

(c) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_3(n) = 2n - 1$.

V 2.2. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent zueinander sind

(a) f ist injektiv

(b) $\forall_{C_1, C_2 \subseteq A}\ f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2)$

V 2.3. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen und $h = g \circ f : A \to C$ ihre Komposition. Bestimmen Sie hinreichende und notwendige Bedingungen an f und g, sodass

(a) h injektiv ist,

(b) h surjektiv ist.

V 2.4. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $(a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $4m = 5^n + 7$.

V 2.5. Wir betrachten das mathematische Problem der „Türme von Hanoi“. Dieses lautet wie folgt: Ein Turm der Höhe $n \in \mathbb{N}$ besteht aus n paarweise unterschiedlich großen Ringen, die zu Beginn in absteigender Größe auf einer Stange gestapelt sind. Der Turm soll durch Versetzen einzelner Ringe (durch jeweils einen Zug) von der linken Stange zu der rechte Stange transportiert werden. Dazu steht eine weitere Stange (in der Mitte) als „Zwischenspeicher“ zur Verfügung. Beim Versetzen müssen zwei Regeln beachtet werden:

– Es darf nie ein größerer Ring auf einem kleineren liegen.
– Es darf immer nur der oberste Ring einer Stange versetzt werden.

Beweisen Sie folgende Aussage mit vollständiger Induktion über n:
Es werden mindestens $S_n = 2^n - 1$ Züge benötigt, um einen Turm der Höhe $n \in \mathbb{N}$ von einer Stange auf eine andere zu versetzen.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de