Vortragsübung 3

V 3.1. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichung mittels vollständiger Induktion

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}: \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}.$$

V 3.2. Skizzieren Sie die Bereiche in der (x, y)-Ebene, für welche jeweils die folgende Ungleichung gilt

(a) $x^3 - x^2 < 2x - 2$,

(b) $|x^2 - y - 2x| \leq 2$,

(c) $|y| + 3x^2 \leq 1$,

(d) $|x + y - 2| + |x - y| \leq 1$.

V 3.3. Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I \in \{(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]\}$. Zeigen Sie, dass

$$\inf I = a \quad \text{und} \quad \sup I = b.$$

Bestimmen Sie weiterhin das Infimum und Supremum der folgenden Mengen

(a) $M_1 = (-3, 10]$,

(b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq\ x \cdot |x| \leq 1\}$,

(c) $M_3 = (-\infty, 2] \cap [-1, 3/2)$,

(d) $M_4 = \{x/(1 + x^2) | \, x \in \mathbb{R}\}$.

Welche der Mengen besitzen sogar ein Minimum bzw. Maximum?

V 3.4. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmege mit $\inf M > 0$. Es sei weiterhin $N \subset \mathbb{R}$ die Teilmenge gegeben durch $N := \left\{\frac{1}{x} | \, x \in M\right\}$. Zeigen Sie, dass

$$\sup N = \frac{1}{\inf M}$$

gilt.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de