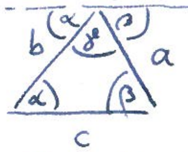
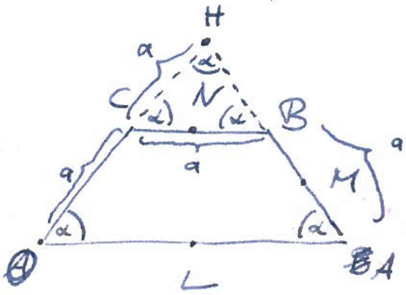
VÜ 4

4.1 Dreieck  $\rightsquigarrow \alpha+\beta+\gamma=\pi$. ~~Das~~ Es gilt $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$

Also ist dieses Dreieck gleichseitig $:\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$
$\Leftrightarrow c=b \wedge \alpha=\frac{\pi}{3}$.

Nun zum Trapez.



Wir können einen Hilfspunkt H ansetzen mit $|\vec{CH}|=a$ und $\measuredangle(\vec{CB},\vec{CH})=\frac{\pi}{3}=\alpha$.

Es ist klar, dass dann ~~aus Symmetriegründen~~ auch CBH ein gleichseitiges Dreieck ist. Dann ist aber auch OAH gleichseitig, d.h. auch $|\vec{OA}|=2a$ bzw $|\vec{OL}|=a$. ~~Dan~~ Mit anderen Worten, OLC, LAB und OLNC sind gleichseitig.

(a) • $2\vec{OL}+\vec{AB}+\underbrace{\vec{BC}}_{=-\vec{OL}}+\underbrace{\vec{CO}}_{=-\vec{OC}}=0 \Rightarrow \vec{AB}=\vec{OC}-\vec{OL}$

• $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}=2\vec{OL}+\frac{1}{2}\vec{AB}=\frac{3}{2}\vec{OL}+\frac{1}{2}\vec{OC}$

• $\vec{ON}=\vec{OC}+\vec{CN}=\vec{OC}+\frac{1}{2}\vec{CB}=\vec{OC}+\frac{1}{2}\vec{OL}$

(b) $\vec{CB}+\vec{BA}+\vec{AC}=0$ d.h. $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$ und $\vec{MN}+\vec{NB}+\vec{BM}=0$
d.h. $\vec{MN}=\vec{BN}+\vec{MB}$.
Es gilt $\vec{AB}=2\vec{MB}$ und $\vec{BC}=2\vec{BN}$. Somit $\vec{AC}=2\vec{MN}$.

(c) $\vec{OA}=2\vec{OL}$, d.h. mit (a): $\vec{OM}=\frac{3}{4}\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OC}$, $\vec{ON}=\frac{1}{4}\vec{OA}+\vec{OC}$.
Also auch $\frac{8}{5}(\vec{OM}-\frac{1}{2}\vec{ON})=\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\vec{OA}=\vec{OA}$.

4.2

(a) Wähle $\vec{a}=\vec{e}_1$, $\vec{b}=\vec{c}=\vec{e}_2$, dann $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=0$, da $\vec{e}_2\times\vec{e}_2=0$,
aber $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{e}_3\times\vec{c}=-\vec{e}_1\neq 0=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

(b) Mit der Grassmann-Identität $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$
ist dies sehr leicht zu beweisen: $\rightsquigarrow$

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec c\times(\vec a\times\vec b)+\vec b\times(\vec c\times\vec a)=\vec b(\vec a\cdot\vec c)-(\vec a\cdot\vec b)\vec c+\vec a(\vec c\cdot\vec b)-(\vec c\cdot\vec a)\vec b$$
$$+\vec c(\vec b\cdot\vec a)-(\vec b\cdot\vec c)\vec a$$
$$=0$$

Eigentlich wird diese Identität aber erst in der Übung bewiesen.
Deshalb rechnen wir noch auf anderem Wege nach.

Es gilt
$$\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3\\a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2+a_1b_2c_1\\a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_3c_2+a_2b_3c_2\end{pmatrix}$$
$$a_1 \qquad b_2c_3-b_3c_2$$

Für alle anderen Permutationen von $\vec a,\vec b,\vec c$ können ~~Sie~~ daraus leicht die ~~d~~ entsprechenden Ausdrücke ablesen. So gilt

$$\vec e_1\cdot\left(\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec c\times(\vec a\times\vec b)+\vec b\times(\vec c\times\vec a)\right)=a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3$$
$$+c_2a_1b_2-c_2a_2b_1-c_3a_3b_1+c_3a_1b_3$$
$$+b_2c_1a_2-b_2c_2a_1-b_3c_3a_1+b_3c_1a_3$$
$$=0$$

genauso

$$\vec e_2\cdot\left(\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec c\times(\vec a\times\vec b)+\vec b\times(\vec c\times\vec a)\right)=a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2+a_1b_2c_1$$
$$+c_3a_2b_3-c_3a_3b_2-c_1a_1b_2+c_1a_2b_1$$
$$+b_3c_2a_3-b_3c_3a_2-b_1c_1a_2+b_1c_2a_1$$
$$=0$$

$$\vec e_3\cdot\left(\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec c\times(\vec a\times\vec b)+\vec b\times(\vec c\times\vec a)\right)=a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_3c_2+a_2b_3c_2$$
$$+c_1a_3b_1-c_1a_1b_3-c_2a_2b_3+c_2a_3b_2$$
$$+b_1c_3a_1-b_1c_1a_3-b_2c_3a_2+b_2c_3a_2$$
$$=0$$

D.h. ~~zu~~ zusammen: $\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec c\times(\vec a\times\vec b)+\vec b\times(\vec c\times\vec a)=0$

4.3

(a) Es gilt $\vec a=\vec n(\vec n\cdot\vec a)+\vec a-\vec n(\vec n\cdot\vec a)=\vec a^{\parallel}+\vec a^{\perp}$.

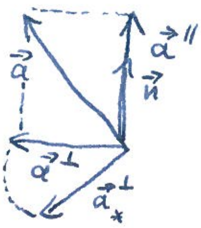
$\vec a^{\parallel}=(\vec n\cdot\vec a)\cdot\vec n$ also natürlich $\vec a^{\parallel}\parallel\vec n$.

$\vec a^{\perp}\cdot\vec n=\vec a\cdot\vec n-\underbrace{(\vec n\cdot\vec n)}_{=1}(\vec n\cdot\vec a)=0$, also $\vec a^{\perp}\perp\vec n$.

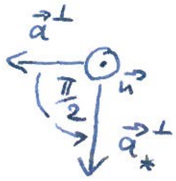
(b) $\vec a_*^{\perp} \cdot \vec a^{\parallel} = \vec a_*^{\perp} \cdot (\vec n \cdot (\vec n \cdot \vec a)) = (\vec n \cdot \vec a)(\vec n \times \vec a) \cdot \vec n = 0$ per Def. von „$\times$"

damit $\vec a_*^{\perp} \cdot \vec a^{\perp} = \vec a_*^{\perp} \cdot (\vec a - \vec a^{\parallel}) \underset{\uparrow \; \vec a^{\parallel} \perp \vec a_*^{\perp}}{=} \vec a^{\perp} \cdot \vec a = (\vec n \times \vec a) \cdot \vec a = 0$ per Def. von „$\times$".

Skizze:



oder von oben



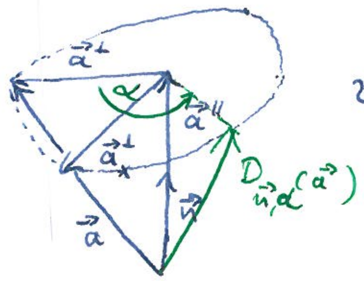
(c) $\vec a^{\parallel} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot 6 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

$\vec a^{\perp} = \vec a - \vec a^{\parallel} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec a_*^{\perp} = \vec n \times \vec a = \begin{pmatrix}n_2 a_3 - n_3 a_2\\ n_3 a_1 - n_1 a_3\\ n_1 a_2 - n_2 a_1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3-2\\1-3\\2-1\end{pmatrix}$

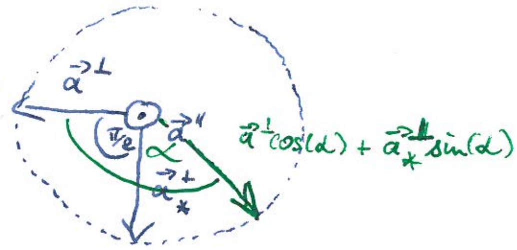
$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

4.4

(a)



von oben



(b) $\vec a^{\parallel} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec a^{\perp} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec a_*^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\+1\end{pmatrix}$

$D_{\vec n,\alpha}(\vec a) = \vec a^{\parallel} + \cos(\alpha)\,\vec a^{\perp} + \sin(\alpha)\,\vec a_*^{\perp}$

also $D_{\vec n,2\pi}(\vec a) = \vec a^{\parallel} + \vec a^{\perp} = \vec a = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$D_{\vec n,\pi}(\vec a) = \vec a^{\parallel} - \vec a^{\perp} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$D_{\vec n,\frac{\pi}{2}}(\vec a) = \vec a + 0 + \vec a_*^{\perp} = \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-1\\\sqrt{3}-2\\\sqrt{3}+1\end{pmatrix}$.