Vortragsübung 5

V 5.1. Es sei $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl in kartesischer Darstellung. Zeigen Sie, dass für das Argument $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ gilt:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan(b/a), & \text{für } a > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi, & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan(b/a) - \pi, & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2, & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2, & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

V 5.2. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung und Polardarstellung

(a) $z_1 = (1 - 2\mathrm{i})^2 - (2 + \mathrm{i})^2$, **(b)** $z_2 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} - (1 + \mathrm{i})$, **(c)** $z_3 = 2\mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i})^{-1}$.

V 5.3. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene

(a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, z \leq 0\}$,
(b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = (\mathrm{Re}\, z)^2 - (\mathrm{Im}\, z)^2\}$,
(c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| \leq |z - \mathrm{i}| \wedge \mathrm{Im}\, z \geq (\mathrm{Re}\, z)^2 - 2\}$.

V 5.4. Bestimmen sie alle (komplexen) Nullstellen des folgenden Polynoms unter Verwendung einer Polynomdivision

$$p(z) = 2z^3 - 9z^2 + 30z - 13.$$