7.1 (a) Sei $m \in \mathbb{N}$, so dass $m \geq |z|$, dann

$$0 \leq \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \underbrace{\frac{|z|}{n-1} \cdot \frac{|z|}{n-2} \cdots \frac{|z|}{m}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{|z|}{m-1} \cdots \frac{|z|}{1}}_{\leq |z|^{m-1}} \cdot \frac{|z|}{n} \leq \frac{|z|^m}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

(b) Es gilt $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \leq \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{3}$$

und $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \geq \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{3}$

D.h. $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{3}$

(c)
$$\frac{2^n + e^n + 2n + 5}{3^n + 5n^2 + 2} = \frac{\overbrace{\left(\tfrac{2}{3}\right)^n}^{n \to \infty \; \to 0} + \overbrace{\left(\tfrac{e}{3}\right)^n}^{n \to \infty \; \to 0} + \overbrace{\frac{2n}{3^n}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{5}{3^n}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{5n^2}{3^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{3^n}}_{\to 0}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

7.2 Es gilt $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$ für $n \geq 2$. Da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt außerdem $a_{n+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}} = \frac{a_n+1}{a_n+2}$, also auch

$$a_{n+2} - a_n = \frac{a_n + 1 - (a_n+2)a_n}{a_n+2} = \frac{+p(a_n)}{a_n+2} \quad \text{mit } -p(x) = x^2 + x - 1.$$

p hat die Nullstellen $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Aus $p(x) \geq 0 \iff x \in [x_2, x_1]$

folgt $a_{n+2} - a_n \geq 0 \iff a_n \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = x_1$.

Außerdem $a_{n+2} \leq x_1 \iff a_n + 1 \leq \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)(a_n+2)$

$$\iff a_n \leq \frac{2(\sqrt{5}-2)}{3-\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = x_1.$$

Da $a_1 = 1 > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ folgt per vollständiger Induktion

$a_{2n+1} < a_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $(a_{2n+1})_n$

ist monoton fallend und beschränkt, also konvergent. Es existiert also

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}+1}{a_{2n-1}+2} = \frac{a+1}{a+2}.$$ Auflösen nach a

ergibt $a^2+a-1 = p(a) = 0$. Da $a \in [0,1]$ folgt $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Analog folgt aus $a_2 = \frac{1}{2} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ induktiv $a_{2(n+1)} \geq a_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Somit ist $(a_{2n})_n$ monoton steigend und beschränkt, also konvergent.

Wie vorher $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_{2n}+1}{\lim_{n\to\infty} a_n + 2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Nun zeigen wir noch, dass $(a_n)_n$ konvergent ist.

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$n \geq \frac{N}{2} \geq \frac{N-1}{2} \Rightarrow |a_{2n} - a| < \varepsilon \text{ und } |a_{2n+1} - a| < \varepsilon.$$

Dies gilt, da $(a_{2n})_n$ und $(a_{2n+1})_n$ konvergent sind.

Für $n \geq N$ folgt nun $|a - a_n| < \varepsilon$, da

$$|a - a_n| = \begin{cases} |a - a_{2\frac{n}{2}}|, & \text{für gerade } n \\ |a - a_{2(\frac{n-1}{2})+1}|, & \text{für ungerade } n \end{cases}.$$

7.3

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \overset{|-\frac{1}{2}|<1}{=} \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-1}{2(n+1)-1} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{2(N+1)-1} + \frac{1}{2\cdot 1-1}\right) = \frac{1}{2}.$$

7.4 (a) divergiert nach Quotientenkriterium:

$$\frac{n!/e^n}{(n+1)!/e^{n+1}} = \frac{e}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(b) Konvergiert nach Vergleich mit konvergenten Reihe:

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}^5 + n + 5}{n + n^4 + 3} \leq \frac{3\sqrt{n}^5}{n^4} = 3\,\frac{1}{n^{3/2}}$$ für $n \geq 5$ und

$\sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n!}}$ konvergiert nach Quot. Krit. und Vergleich:

Es gilt $\frac{-1}{\sqrt{n!}} \leq \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt{n!}}$ und $\frac{\pm 1/\sqrt{n!}}{\pm 1/\sqrt{(n+1)!}} = \sqrt{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pm 1}{\sqrt{n!}}$ und damit auch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n!}}$

(d) Es gilt $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$. Also ist

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ keine Nullfolge und $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ divergiert.

(e) $$\frac{3^n}{3^n\sqrt{n}-e^n} = \frac{1}{\sqrt{n}-\underbrace{\left(\frac{e}{3}\right)^n}_{\to 0}}$$ konvergiert monoton gegen 0.

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n\sqrt{n}-e^n}$ nach dem Leibnitzkriterium.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ konvergiert nach Quot. Krit., da

$$\frac{2^n/(n+1)!}{2^{n+1}/(n+2)!} = \frac{n+2}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

(g) Es gilt $(1+(e-1))^n \geq 1 + n(e-1)$ nach Bernoullischer Ungl.

Da ln monoton ist folgt

$$\ln(e^n) = n \geq \ln(1+n(e-1)) \geq \ln(n)$$

Somit $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. D.h. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ divergiert.