Apl. Prof. Dr. J. Wirth
Jonas Brinker, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.
Dominik Wittwar, M.Sc.

Vortragsübung 8

V 8.1. Der Rest von VÜ 7.4. Sie entscheiden, ob wir die Aufgaben (oder welche davon) bearbeiten.

Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf ihre Konvergenz.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n!}}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

V 8.2. Die Statistik zeigt, dass Aufgabe V 8.3(b) nur sehr *zögerlich* votiert wurde; daher wollen wir nochmals einen detaillierten Blick darauf werfen: Wie kommt man auf die Beweis-Idee und wie schreibt man den Beweis dann sauber auf?

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei komplexe Zahlenfolgen und sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $z_n := x_n y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Konvergiere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{C}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $y \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie ausgehend von der Definition, dass $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = xy$ gilt.

V 8.3. Wir betrachten die Funktion $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a) Begründen Sie, dass f auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist.

(b) Existiert eine Fortsetzung von f, welche stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist?

Definition 1
*Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **global Lipschitz-stetig** auf $D \subset \mathbb{R}$, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt so, dass für alle $x, y \in D$*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

*gilt. Ist $L < 1$, so heißt f auch **Kontraktion**.*

V 8.4. Betrachten Sie für $a \geq 0$ die reelle Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot}$ auf dem Intervall $D_a = [a, \infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{\cdot}$ für jedes $a > 0$ Lipschitz-stetig ist.

(b) Geben Sie das kleinste a an, so dass $\sqrt{\cdot}$ auf D_a eine Kontraktion ist.

(c) Gilt **(a)** auch für $a = 0$?

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de