

Vortragsübung 9

V 9.1. Finden Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$, auf dem

$$f: x \mapsto \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} - \frac{x^3}{x^2 - 3x}$$

eine Funktion definiert. Kann man f durch Zuweisung reeller Funktionswerte zu einer stetigen Funktion mit einem größeren Definitionsbereich fortsetzen?

V 9.2. Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und $a < b$. Weiterhin gelte $f(a) < g(a)$ und $g(b) < f(b)$. Zeigen Sie, dass ein $c \in [a, b]$ existiert, für welches $f(c) = g(c)$ gilt.

V 9.3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, bijektiv. Zeigen Sie

- (a) f ist entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend.
- (b) Die Inverse f^{-1} besitzt das gleiche Monotonieverhalten wie f .

V 9.4. Gibt es eine stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche jeden ihrer Funktionswerte genau zweimal annimmt?

Z 9.5. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(f(f(x))) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass den bereits $f(x) = x$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.