10.1 (a) Als Komposition diff.barer Funktionen ist f diff.bar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Seien $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ und $y_n = \frac{1}{2\pi n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Aber $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2 = 1$

und $\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(0)}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n)^2 = 0$.

Somit existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ nicht und f ist nicht diff.bar in $x=0$.

(b) Es gilt $g(x) = |x^2-1|^2 + |x| + 1 = (x^2-1)^2 + |x| + 1$.

Die Funktion $\tilde{g}: x \mapsto (x^2-1)^2+1$ ist diff.bar auf ganz $\mathbb{R}$ und die Fkt. $x \mapsto |x|$ ist diff.bar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (da $|x|=x$ für $x>0$, $|x|=-x$ für $x<0$).

Also ist $g(x) = \tilde{g}(x) + |x|$ diff.bar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Die Betragsfunktion ist nicht diff.bar in $x=0$, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{n}|-|0|}{\frac{1}{n}} = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} \frac{|-\frac{1}{n}|-|0|}{-\frac{1}{n}}.$$

Da $\tilde{g}$ ~~jedoch~~ in $x=0$ diff.bar ist, ist g in $x=0$ nicht diff.bar.

(c) h ist als Komposition diff.barer Fkt.en diff.bar auf $\mathbb{R}\setminus\{-\pi, 0\}$.

In $x=0$ gilt:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x-1}{x} = \frac{d}{dx} e^x \Big|_{x=0} = 1$$

und $$\lim_{x\to 0-} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{x+1-1}{x} = 1$$

D.h. $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x}$ existiert und h ist in $x=0$ diff.bar.

In $x=-\pi$ gilt:

$$\lim_{x\to(-\pi)-} h(x) = 0 \neq -\pi+1 = h(-\pi)$$

Also ist h in $x=-\pi$ noch nicht einmal stetig und kann deshalb nicht diff.bar sein (siehe auch Übung)

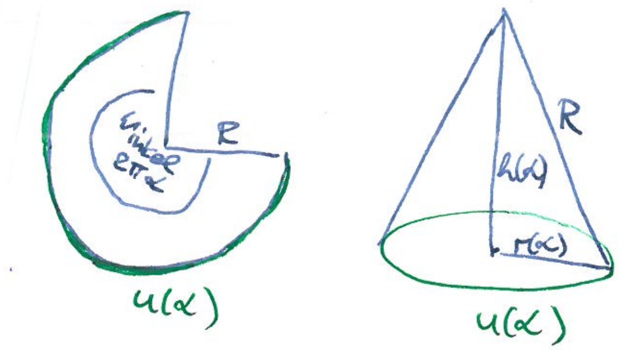
10.2 (a) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} f'(c)} + \underbrace{\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}}_{\xrightarrow{h\to 0} f'(c)}\Bigg)$$

$$= f'(c)$$

(b) Setze $f(x)=|x|$ und $a<0$, $b>0$ $c=1$. Dann

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}}_{=0} = 0$$ aber f ist nicht diff.bar in $c=1$ (siehe 10.1)

10.3



$u(\alpha) = 2\pi\alpha R = 2\pi r(\alpha)$

Also $r(\alpha) = \alpha R$

und $h(\alpha) = \sqrt{R^2-\alpha^2 R^2}$
$= \sqrt{1-\alpha^2}\, R$.

Es gilt für das Volumen $V(\alpha)$ vom Kegel:

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi r(\alpha)^2 h(\alpha) = \frac{\pi R^3}{3}\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2} \geq 0 \text{ und } V(0)=V(1)=0.$$

Dabei sind Werte für $\alpha\in[0,1]$ sinnvoll.

Da $V:[0,1]\to\mathbb{R}$ globale Minima an den Rändern annimmt, ~~und~~ besitzt V ein globales Maximum in $(0,1)$.

Es gilt

$$V'(\alpha) = \frac{\pi R^3}{3}\left(2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}+\alpha^2\frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) = \frac{\pi R^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(2\alpha(1-\alpha^2)-\alpha^3\right)$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(-3\alpha^3+2\alpha\right) \quad \text{für } \alpha\in(0,1).$$

Für $\alpha\in(0,1)$ gilt außerdem:

$$V'(\alpha)=0 \iff -3\alpha^3+2\alpha=0 \iff \alpha^2=\frac{2}{3} \iff \alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Wenn V in $\beta\in(0,1)$ ein Maximum besitzt, dann $V'(\beta)=0$.

Also ~~ist~~ hat V in $\beta=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ein globales Maximum, da dies der einzige Kandidat ist.

10.4 Mittelwertsatz (MWS): Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit f diff.bar auf (a,b) dann ex. ein $t\in(a,b)$ mit $-f(a)+f(b)=(b-a)f'(t)$.

(a) $f(s)=(1+s)^r$, $a=0$, $b=x$. Dann ex. $t_x\in(0,x)$ mit

$(1+x)^r-1=(x-0)f'(t_x)$. Dabei gilt $\frac{d}{dy}y^r=\frac{d}{dy}e^{r\log y}=\frac{r}{y}e^{r\log y}$
$=\frac{r}{y}y^r=ry^{r-1}$ für $y>0$.

Also $f'(s)=r(1+s)^{r-1}$ und somit

$$(1+x)^r-1=x\,r\underbrace{(\underbrace{1+t_x}_{\geq 1})^{\overbrace{r-1}^{\geq 0}}}_{\geq 1}\geq xr \Rightarrow (1+x)^r\geq 1+rx.$$

(b) analog wie in (a), nur hier gilt $r\in[0,1]$

$$(1+x)^r-1=x\,r\underbrace{(\underbrace{1+t_x}_{\geq 1})^{\overbrace{r-1}^{\leq 0}}}_{\leq 1}\leq xr \Rightarrow (1+x)^r\leq 1+rx$$

(c) Hier nutzen wir $f(s)=\ln(s)$ und $a=1$, $b=x$. Somit

$$\ln(x)-\underbrace{\ln(1)}_{=0}=(x-1)\cdot\ln'(t_x)=(x-1)\frac{1}{t_x} \text{ für ein } t_x\in[1,x].$$

D.h. es gilt auch $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{t_x}\leq 1$ und somit

$$(1-\tfrac{1}{x})=(x-1)\frac{1}{x}\leq\underbrace{(x-1)\frac{1}{t_x}}_{=\ln(x)}\leq(x-1)\cdot 1$$