Apl. Prof. Dr. J. Wirth
Jonas Brinker, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.
Dominik Wittwar, M.Sc.

Vortragsübung 10

V 10.1. Bestimmen sie alle $x \in \mathbb{R}$ in denen die folgenden Funktionen differenzierbar sind.

(a) $f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(b) $g(x) := |x^2 - 1|^2 + |x| + 1$

(c) $h(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x \in [0, \infty), \\ x + 1, & x \in [-\pi, 0), \\ \sin(x), & x \in (-\infty, -\pi) \end{cases}$

V 10.2. Es seien $a < c < b$ und $f \colon (a, b) \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Beweisen Sie:

(a) Ist f in c differenzierbar, so gilt

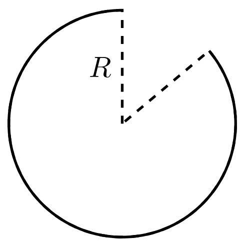
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h}.$$

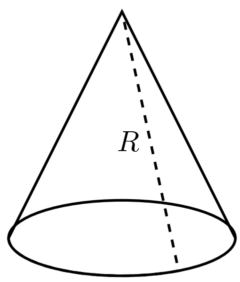
(b) Die Umkehrung gilt nicht. D.h. es is möglich, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h}$$

existiert, aber f in c nicht differenzierbar ist.

V 10.3. Aus einem Kreis mit Radius R is ein Sektor so auszuschneiden, dass der aus dem restlichen Teil geformte Kreiskegelmantel ein maximales Volumen umschließt.





V 10.4. Beweisen Sie die folgenden Abschätzungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

(a) $(1+x)^r \geq 1 + rx$ für $x \geq 0$ und $r \geq 1$

(b) $(1+x)^r \leq 1 + rx$ für $x \geq 0$ und $r \in [0, 1]$

(c) $1 - \dfrac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$ für $x > 1$

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de