S. Hofbauer
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

Sommersemester 2023

I. Steinwart

Übungsblatt 4

Aufgabe 13. *Linear unabhängige Mengen*

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Jede Menge $M \subsetneqq \mathbb{R}^3$ von paarweise linear unabhängigen Vektoren ist linear unabhängig.

Hinweis: Erinnern Sie sich an Definition $9.1.3$ aus dem Vorlesungsskript.

b) Jede Menge $M \subsetneqq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ von paarweise orthogonalen Vektoren ist linear unabhängig.
Hinweis: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Vektoren $v_1, ..., v_m \in V$ sind paarweise orthogonal, falls für alle $i, j = 1, ..., m$ das Folgende erfüllt ist: $v_i \perp v_j \Leftrightarrow i \neq j$.

Aufgabe 14. *Lineare Abbildungen*

Let V, W be $\mathbb{K}$-vector spaces, $v_1, \ldots, v_n \in V$ and $T : V \to W$ a linear mapping.
Are the following statements true in general? Give proofs or present counter examples.

(a) If $v_1, \ldots, v_n$ are linearly independent, then $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ are linearly independent.

(b) If $v_1, \ldots, v_n$ are linearly independent, then $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ are linearly dependent.

(c) If $v_1, \ldots, v_n$ are linearly independent and T is injective, then $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ are linearly independent.

Aufgabe 15. *Lineare Unabhängigkeit, Untervektorräume, Basen*

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

linear abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Ist $M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien M_1 und M_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass $M_1 \cap M_2$ auch ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

d) Gegeben ist eine Basis $\{a, b, c\}$ von $\mathbb{R}^3$. Bildet das Tripel $x = a+b-2c, y = -a+c, z = 2b - 2c$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Und ist $\{x, y, c\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 16. *Dimension*

Gegeben seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+3\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension von $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{C}^3$, indem Sie $\mathbb{C}^3$ einmal als Vektorraum über $\mathbb{R}$ und einmal als Vektorraum über $\mathbb{C}$ betrachten.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 4 (Bearbeitungszeit 05.05.–11.05.) im Ilias-Kurs zu den Gruppenübungen in dem Ordner Online-Übungen
`https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_fold_3264159.html`
Der **Bearbeitungszeitraum** startet am Freitag, den 05.05. um 16:00 Uhr und endet am Donnerstag, den 11.05. um 23:55 Uhr. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei sich die Fragen bei jedem Testdurchlauf ändern und nur der zuletzt gestartete Testdurchlauf gewertet wird. Ihre Ergebnisse aus dem Test können Sie eine Woche lang direkt nach Ende des Bearbeitungszeitraums einsehen.