S. Hofbauer
V. Kussmaul
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

Sommersemester 2023

I. Steinwart

Übungsblatt 5

Aufgabe 17. *Matrizen*

Bestimmen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Wenn A und B 2×2-Matrizen sind, dann gilt $AB = BA$.

(b) Wenn A eine 6×4-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix ist, so dass BA eine 4×4-Matrix ist, dann sind $m = 4$ und $n = 6$.

(c) Wenn B eine Spalte mit Nullen hat, dann hat AB auch eine Spalte mit Nullen, wenn dieses Produkt definiert ist.

(d) Wenn B eine Spalte mit Nullen hat, dann hat auch BA eine Spalte mit Nullen, wenn dieses Produkt definiert ist.

Aufgabe 18. *Darstellung durch Matrizen I*

(a) Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ und der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = (2, 0, 1)^T$, $b_2 = (1, 0, 1)^T$ und $b_3 = (0, 1, 2)^T$.

(i) Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von L bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}_3$.

(ii) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix der identischen Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{E}_3$.

(b) Es bezeichne $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}, 3)$ den Vektorraum der reellen Polynome $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bis zum Grad 3. Die lineare Abbildung $D : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, 3) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, 3)$ ist gegeben durch $D(p)(x) = p'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung von D bezüglich der Basis $\{f_k : k = 0, 1, 2, 3\}$ mit $f_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 19. *Matrizenkalkül*

a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB und BA.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix mit der Eigenschaft, dass für alle $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $AB = BA$. Zeigen Sie: Es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $A = \alpha I$, wobei $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix ist.

Hinweis: Berechnen Sie AB und BA für Matrizen $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, bei der genau ein Eintrag eins ist und alle anderen Einträge null sind.

Aufgabe 20. *Darstellung durch Matrizen II*

Consider the two linear functions $H : \mathbb{R}^3 \to \mathsf{Pol}(\mathbb{R}, 2)$ and $G : \mathsf{Pol}(\mathbb{R}, 2) \to \mathcal{M}(2, 2)$ given as here.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto (a+b)x^2 + (2a+2b)x + c \qquad px^2 + qx + r \mapsto \begin{pmatrix} p & p-2q \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

Use these bases for the spaces.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = (1+x, 1-x, x^2)$$

$$\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

(a) Give the formula for the composition map $G \circ H : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}(2, 2)$ derived directly from the above definition.

(b) Represent H and G with respect to the appropriate bases.

(c) Represent the map $G \circ H$ computed in the first part with respect to the appropriate bases.

(d) Check that the product of the two matrices from the second part is the matrix from the third part.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 5 (Bearbeitungszeit 12.05.–18.05.) im Ilias-Kurs zu den Gruppenübungen in dem Ordner Online-Übungen
`https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_fold_3264159.html`
Der **Bearbeitungszeitraum** startet am Freitag, den 12.05. um 16:00 Uhr und endet am Donnerstag, den 18.05. um 23:55 Uhr. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei sich die Fragen bei jedem Testdurchlauf ändern und nur der zuletzt gestartete Testdurchlauf gewertet wird. Ihre Ergebnisse aus dem Test können Sie eine Woche lang direkt nach Ende des Bearbeitungszeitraums einsehen.