S. Hofbauer
V. Kussmaul
A. Logioti

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

Sommersemester 2023

I. Steinwart

Übungsblatt 6

Aufgabe 21. *Lineare Unabhängigkeit, Matrizenkalkül*

(a) Wie muss $\alpha \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so dass die folgenden Vektoren linear unabhängig sind?

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, welche der folgenden Matrixprodukte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$AB,\ BA,\ CD,\ DC,\ DC^\top,\ D^\top C,\ D^\top D,\ DD^\top.$$

Aufgabe 22. *Matrizeninvertierung, Basiswechselmatrizen*

(a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben seien die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie die Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ und $\mathcal{B}' = (w_1, w_2)$. Weiter sei $\mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die identische Abbildung.

Bestimmen Sie

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}), \quad \mathcal{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}), \quad \mathcal{M}^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}), \quad \mathcal{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}).$$

Bemerkung: Mit $\mathcal{E}_n$ bezeichnen wir die Standardbasis (kanonische Basis) von $\mathbb{K}_n$, d.h. $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$.

Aufgabe 23. *Inverse Matrizen*

(a) A matrix $A \in M_{\mathbb{K}}(n,n)$ is called symmetric if $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ and $A^\top = A$ holds or Hermitian if $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ and $\bar{A}^\top = A$ holds.

Show the following: If $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ is symmetric and invertible, then A^{-1} is symmetric as well.

(b) Consider the diagonal matrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Give conditions for the λ_i, $i = 1, \dots, n$, such that D is invertible. Determine the inverse D^{-1} in that case.

(c) Let $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Give conditions for $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ such that A is invertible. Determine the inverse A^{-1} in that case.

Aufgabe 24. *Basiswechsel*

Es sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}(S), \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}(S), \quad \mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(S).$$

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 6 (Bearbeitungszeit 19.05–25.05.) im Ilias-Kurs zu den Gruppenübungen in dem Ordner Online-Übungen
`https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_fold_3264159.html`
Der **Bearbeitungszeitraum** startet am Freitag, den 19.05. um 16:00 Uhr und endet am Donnerstag, den 25.05. um 23:55 Uhr. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei sich die Fragen bei jedem Testdurchlauf ändern und nur der zuletzt gestartete Testdurchlauf gewertet wird. Ihre Ergebnisse aus dem Test können Sie eine Woche lang direkt nach Ende des Bearbeitungszeitraums einsehen.