Übungsblatt 7

Aufgabe 25. *Invertierbare Matrizen und Lineare Gleichungssysteme*

(a) Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls A^{-1}.

(b) Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26. *Dimensionsformel*

Gegeben seien die linearen Abbildungen $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ und $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit den zugehörigen Abbildungsmatrizen

$$\mathcal{M}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_4}(S) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_3}(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{Ker} S$, $\operatorname{Rang} S$, $\operatorname{Rang} T$ und $\dim(\operatorname{Ker} T)$.

Aufgabe 27. *Gauss-Algorithmus*

Given the system of linear equations

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ x_1 + (\alpha - 1)x_2 + (\beta + 2)x_3 &= 3 \end{aligned}$$

with parameters $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Determine, depending on the values of parameters α and β, whether the system of equations has exactly one solution, no solution, or infinitely many solutions, and determine all solutions (as a function of α and β).

Aufgabe 28. *Rang, Transposition und Lineare Unabhängigkeit*

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie $\dim(\operatorname{Ker}(B))$.

(b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Matrix $M = B + B^\top$ symmetrisch, d.h. es gilt $M = M^\top$.

ii) Seien $k, m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix mit $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Sind $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig, dann sind auch $Av_1, \ldots, Av_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 7 (Bearbeitungszeit 26.05–08.06.) im Ilias-Kurs zu den Gruppenübungen in dem Ordner Online-Übungen
`https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_fold_3264159.html`
Der **Bearbeitungszeitraum** startet am Freitag, den 26.05. um 16:00 Uhr und endet am Donnerstag, den 08.06. um 23:55 Uhr. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei sich die Fragen bei jedem Testdurchlauf ändern und nur der zuletzt gestartete Testdurchlauf gewertet wird. Ihre Ergebnisse aus dem Test können Sie eine Woche lang direkt nach Ende des Bearbeitungszeitraums einsehen.