

Übungsblatt 8

Aufgabe 29. Eigenschaften von Determinanten

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Ist AB invertierbar, dann ist auch BA invertierbar.
- (b) Es gilt $\text{Rang}(AB) = \text{Rang}(BA)$.
- (c) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- (d) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. es gilt $A = -A^\top$, dann ist A nicht invertierbar oder n gerade.

Aufgabe 30. Gram-Schmidt

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gram-Schmidt-Methode eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 , die sich aus den folgenden Basisvektoren ableitet:

$$v_1 = (-2, 2, 1)^\top, \quad v_2 = (-2, 0, 1)^\top, \quad v_3 = (3, 0, 0)^\top.$$

Sie können die Reihenfolge bestimmen, in der Sie die Vektoren benutzen.

- (b) Es sei $V \subsetneq \mathbb{R}^4$ ein Untervektorraum mit Basis w_1, w_2, w_3 , wobei

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt, um eine Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 von V zu bestimmen.

Aufgabe 31. Determinanten

Bestimmen Sie jeweils die Determinanten der folgenden Matrizen mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 32. Orthogonalität, Orthonormalbasen

Suppose that \mathbb{C}^3 is equipped with the standard inner product. Show that the vectors

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3+3i \\ 1+i \\ -4 \end{pmatrix}$$

are orthogonal unit vectors, and find an orthonormal basis for \mathbb{C}^3 which contains them.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 8 (Bearbeitungszeit 09.06–15.06.) im Ilias-Kurs zu den Gruppenübungen in dem Ordner Online-Übungen

https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_fold_3264159.html

Der **Bearbeitungszeitraum** startet am Freitag, den 09.06. um 16:00 Uhr und endet am Donnerstag, den 15.06. um 23:55 Uhr. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei sich die Fragen bei jedem Testdurchlauf ändern und nur der zuletzt gestartete Testdurchlauf gewertet wird. Ihre Ergebnisse aus dem Test können Sie eine Woche lang direkt nach Ende des Bearbeitungszeitraums einsehen.